

積分の中でも部分積分は少々慣れが必要かも知れませんが、今回は部分積分の典型的な問題の解き方を学び、皆さんが自信を持って部分積分に臨めるようになってもらいたいと思います。では、早速始めましょう。

問題 ① $\int \sin x \log(\cos x) dx$

方針 ポイントは $\{\log(\cos x)\}' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ です。

解答
$$\begin{aligned} \int \sin x \log(\cos x) dx &= \int (-\cos x)' \log(\cos x) dx = -\cos x \log(\cos x) - \int (-\cos x) \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx \\ &= -\cos x \log(\cos x) - \int \sin x dx = -\cos x \log(\cos x) + \cos x + C \end{aligned}$$

(C は積分定数)

問題 ② $\int x \tan^2 x dx$

方針 $\tan^2 x$ が出てきたら、いつも $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ を思い出してください。従って、

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ と変形します。

解答
$$\begin{aligned} \int x \tan^2 x dx &= \int x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int x dx = \int x (\tan x)' dx - \frac{1}{2} x^2 \\ &= x \tan x - \int \tan x dx - \frac{1}{2} x^2 = x \tan x - \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx - \frac{1}{2} x^2 \\ &= x \tan x + \log |\cos x| - \frac{1}{2} x^2 + C \quad (C \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

問題 ③ $\int x^2 \log(x+1) dx$

方針 $\{\log(x+1)\}' = \frac{1}{x+1}$ であることを意識し、 x^2 の積分に $x+1$ が因数に含まれるように変形する。

解答
$$\begin{aligned} \int x^2 \log(x+1) dx &= \int \left\{ \frac{1}{3}(x^3+1) \right\}' \log(x+1) dx = \frac{1}{3}(x^3+1) \log(x+1) - \int \frac{1}{3}(x^3+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{3}(x^3+1) \log(x+1) - \int \frac{1}{3}(x^2-x+1) dx \\ &= \frac{1}{3}(x^3+1) \log(x+1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{3} x + C \quad (C \text{は積分定数}) \end{aligned}$$