

(入試演習)

媒介変数の微分積分

問題 媒介変数表示 $x = \sin t$, $y = (1 + \cos t)\sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする。

- (1) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。
- (2) C の凹凸を調べ、 C の概形をかけ。
- (3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

解答 (1) $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = (-\sin t)\sin t + (1 + \cos t)\cos t = 2\cos^2 t + \cos t - 1$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos^2 t + \cos t - 1}{\cos t} = 2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}$

また $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

よって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t} = -2\tan t - \tan t(\tan^2 t + 1)$
 $= -\tan t(\tan^2 t + 3)$

(2) (1) より, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\tan t(\tan^2 t + 3)$ であるから

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \qquad \frac{\pi}{2} < t < \pi \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

よって, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において, 曲線 C は上に凸, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ において曲線 C は下に凸の曲線である。

また, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ より, $0 < t < \pi$ の範囲で $\frac{dx}{dt} = 0$

となるのは $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2\cos^2 t + \cos t - 1 \\ &= (2\cos t - 1)(\cos t + 1) \end{aligned}$$

よって, $0 < t < \pi$ の範囲で $\frac{dy}{dt} = 0$ となるのは $t = \frac{\pi}{3}$

ゆえに, $0 \leq t \leq \pi$ における増減表は右のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	
y	0	$\uparrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0

したがって、曲線 C の概形は右の図のようになる。

(3) (2) より、求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における y を y_1 , $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ における y を y_2 とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_1 \frac{dx}{dt} dt - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} y_2 \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt = \int_0^{\pi} (\cos t + \cos^2 t) \sin t dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos^2 t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

