二項定理の基礎 ①

by Aokijuku

［ 二項定理の考え方 ］

$(a+b)^5$ において、 a^3b^2の係数がいくつになるかを考えて見よう。

$(a+b)^5=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ の展開において、 b に着目すると、5つの括弧のうち2つの括弧から b を取り出す取り出し方は ${}_5C_2$ 通りある。 a については残りの括弧から選ぶしかないから、その選び方は1通りしかない。つまり a^3b^2 は ${}_5C_2$ 個となり、 a^3b^2 の係数は ${}_5C_2$と言える。

この考え方を使うと、$(a+b)^5$ の展開式は次のようになる。（※但し、 b に着目するとする。）

$(a+b)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4b+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4ab^4+{}_5C_5b^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

問題　上の例と同様にして、$(2a-3b)^4$ を展開しなさい。

解答　$(2a-3b)^4={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3(-3b)+{}_4C_2(2a)^2(-3b)^2+{}_4C_3\cdot 2a(-3b)^3+{}_4C_4(-3b)^4$

$=16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4$

類題　$(3x^2-2x)^5$ において、 x^7 の係数を求めなさい。

解答　x^7 の項は、5つの括弧のうち2つから $3x^2$ を、残りの3つの括弧から $-2x$ を取り出すから

${}_5C_2(3x^2)^2(-2x)^3=-720x^7$ より、求める係数は-720となります。

例題　$(2x-3y+z)^7$ において、 $x^2y^3z^2$ の係数を求めなさい。

解答　まず7つの括弧のうち2カ所から $2x$ 取り出す取り出し方は ${}_7C_2$ 通りあり、残りの5つの括弧から $-3y$ を取り出す取り出し方は ${}_5C_3$ 通りあります。 z については残りの括弧から選ぶしかないから、その選び方は1通りである。よって

${}_7C_2\times{}_5C_3\times(2x)^2(-3y)^3z^2=-22680x^2y^3z^2$ より求める係数は-22680となります。

類題　$(2x^2-3x-1)^6$ における x^4 の係数を求めなさい。

解答　与式の展開において、 x^4 の項のでき方には次の3通りがあります。6つの括弧の中から2カ所から $2x^2$ を選び、あとの4つの括弧からは-1を選ぶ場合。6つの括弧の中から1カ所から $2x^2$ を選び、残りの5カ所のうち2カ所から $-3x$ を選び、残りの3つの括弧からは-1を選ぶ場合。最後は6つの括弧のうち4カ所から $-3x$ を選び、残りの2つの括弧からは-1を選ぶ場合。これらを全部集めると次のようになります。

${}_6C_2(2x^2)^2(-1)^4+{}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot 2x^2(-3x)^2(-1)^3+{}_6C_4(-3x)^4(-1)^2=60x^4-1080x^4+1215x^4=195x^4$

より、求める係数は195

問題　11^{12} を100で割ったときの余りを求めなさい。

二項定理の基礎 ①

by Aokijuku

解答

$11^{12}=(10+1)^{12}={}_{12}C_0 10^{12}+{}_{12}C_1 10^{11}\times 1+{}_{12}C_2 10^{10}\times 1^2+{}_{12}C_9 10^3\times 1^9+{}_{12}C_{10}10^2\times 1^{10}+{}_{12}C_{11}\cdot 10\times 1^{11}+{}_{12}C_{12}\times 1^{12}$

この式において ${}_{12}C_0 10^{12}+{}_{12}C_1 10^{11}\times 1+{}_{12}C_2 10^{10}\times 1^2+\cdots+{}_{12}C_{10}10^2\times 1^{10}$ は 100で割り切れるので、求める余りは ${}_{12}C_{11}\cdot 10\times 1^{11}+{}_{12}C_{12}\times 1^{12}$ を100 で割って求められる。${}_{12}C_{11}\cdot 10\times 1^{11}+{}_{12}C_{12}\times 1^{12}=12\times 10+1=121$

121を100で割った余りは21だから、求める余りは21となる。

問題 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2>2$（nは２以上の自然数）となることを証明しなさい。

解答 二項定理より

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n={}_nC_o\cdot 1^n+{}_nC_1\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+{}_nC_2\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2}+{}_nC_3\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+{}_nC_n\cdot\frac{1}{n^n}$$

右辺の全ての項は正で、n＝２の時、右辺は項が３個となるので、最初の２個の項を除いて他の項を全て消去すると、当然、左辺の方が大きくなる。つまり $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>{}_nC_o\cdot 1^n+{}_nC_1\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ が成り立つ。

よって $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+n\cdot\frac{1}{n}$ すなわち$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ となる。