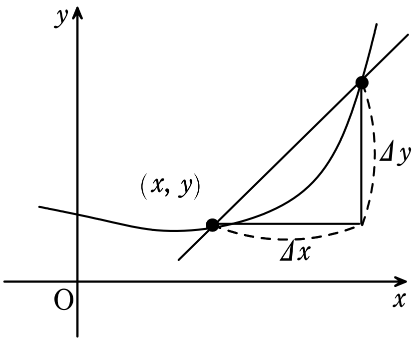
合成微分の考え方

by Aokijuku

（接線の傾きの定義）

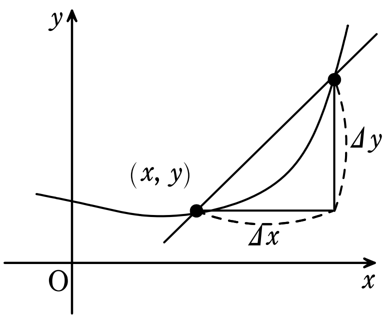


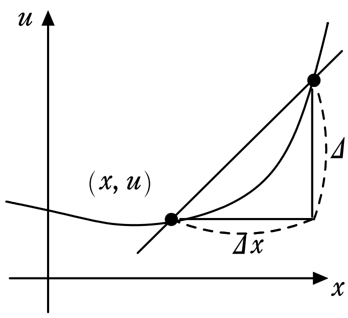
左の図において、Δx , Δy は、それぞれ、点(x, y) からの x, y の微少な増加量を表します。このとき、点 (x, y) における接線の傾きを定義する式を言いなさい。

解答　点(x, y) における接線の傾きは $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ で定義されるが、これはyをx で微分したy' あるいは $\dfrac{dy}{dx}$ を表している。

問題　$y = f(g(x))$ （つまりy はx の関数$g(x)$ の関数である。この場合、勿論、y はx の関数である。）かつ、$u = g(x)$ （つまりu は xの関数である。）ならば、次の式が成り立つ。これを説明しなさい。　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dt}$

解答





分数の計算 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ が成り立ち、上の２つのグラフにおいて、$\Delta x \to 0$ のとき、$\Delta u \to 0$ であることから

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ が成り立つ。　つまり　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ が成り立つと言える。

問題　上の合成微分を使って、次の式を微分してみよう。

① $y = (ax + b)^n$ を微分してみよう。まず、$y = (ax + b)^n$ におい　て、$u = ax + b$ とおくと、$y = u^n$ となるから

$\dfrac{dy}{du} = \square$　また　$\dfrac{du}{dx} = \square$ となる。よって、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \square = \square$ となる。

② $y = \sin^5 x$, つまり $y = (\sin x)^5$ を微分してみよう。 この式で、$u = \sin x$ とおくと、$y = u^5$ となるから、

$\dfrac{dy}{du} = \square$　　また、$\dfrac{du}{dx} = \square$ となる。よって、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \square = \square$ となる。

合成微分の考え方

by Aokijuku

解答 ① $\dfrac{dy}{du}=nu^{n-1}$ $\dfrac{du}{dx}=a$ よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot a=na(ax+b)^{n-1}$

② $\dfrac{dy}{du}=5u^4$ $\dfrac{du}{dx}=\cos x$ よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=5u^4\cdot\cos x=5\sin^4 x\cos x$

問題 合成微分をuなどの文字で置き換えずにやるには、どうしたら良いですか。$y=(3x^2-5x+1)^4$ を例に説明しなさい。

解答 まず、$y=(3x^2-5x+1)^4$ において、$3x^2+5x+1$ をxのように見なし、指数の4を前に出して次数を下げ、とりあえず $4(3x^2-5x+1)^3$ とします。そして、xのように見なした $3x^2-5x+1$ をxで微分した式、$(3x^2-5x+1)'=6x-5$ をそれにかければ良いのです。 従って $y'=4(3x^2-5x+1)^3\cdot(3x^2-5x+1)'=4(6x-5)(3x^2-5x+1)^3$
となります。
これを前問のようにuを使って解くと次のようになります。$y=(3x^2-5x+1)^4$ で $u=3x^2-5x+1$ とおくと、$y=u^4$
より $\dfrac{dy}{du}=4u^3$, また $\dfrac{du}{dx}=6x-5$ よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=4u^3\cdot(6x-5)=4(6x-5)(3x^2-5x+1)^3$
となります。

問題 合成微分の考え方を使って、次の関数を微分せよ。
（※この問題を解く前に、まず三角関数の微分のところを学習し ましょう。）

(1) $y=\sin 3x$ (2) $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (3) $y=\tan 2x$ (4) $y=\sin^2 x$

(5) $y=\tan^2 x$ (6) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ (7) $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$ (8) $y=\cos^3 2x$

解答 (1) $y'=\cos 3x\cdot(3x)'=(\cos 3x)\cdot 3=3\cos 3x$

(2) $y'=-\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)'=-\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 3=-3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(3) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

(4) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

(5) $y'=2\tan x\cdot(\tan x)'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

(6) $y'=-\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(7) $y'=-\dfrac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(8) $y'=3\cos^2 2x\cdot(\cos 2x)'=3\cos^2 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=-6\cos^2 2x\sin 2x=-3\cos 2x\sin 4x$