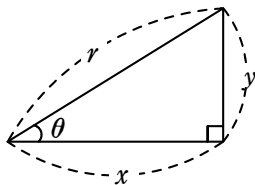


三角比と単位円

by Aokijuku

数Ⅰで学ぶ三角比や、数Ⅱで学ぶ三角関数には、とても多くの公式が出てきます。それらをきちんと覚えて使いこなすのは大変なことです。が、単位円（半径が1の円）と三角比の関係を理解して、それを活用すれば、ほとんどの公式を覚えずに済みますことが出来ます。今回は、その単位円の使い方を勉強します。

まず、左の図形において、基本的な三角比である $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\tan \theta$ についての定義を確認しましょう。

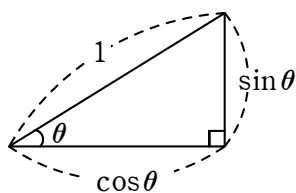


勿論、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ですね。

ところで、これらの三角比は θ の大きさには影響を受けますが、直角三角形の大きさそのものには何ら影響は受けません。仮に $r=1$ となったとしても、相似の三角形であれば、三角比の各値は三角形の大きさに寄らず、どの三角形でも同じになります。一体、 $r=1$ とすることで、どんなメリットがあるのでしょうか。実はメリットは大ありなのです。それによって三角比の利用に大きな飛躍がもたらされます。

実際に $r=1$ としてみると、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ より、 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$, 更に

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ となります。



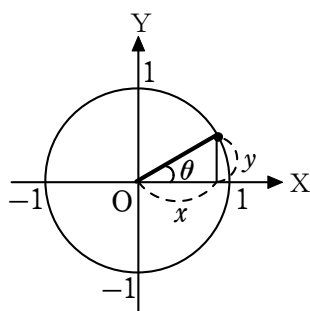
このように三角比を定義し直すことによる最初のメリットの1つとして、三角比の相互関係があります。左の三角形に三平方の定理を適用すると、

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ という関係が求まります。更に、この式の両辺を $\cos^2 \theta$ で割

ると $\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ つまり $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ という三角

比の相互関係が求まります。（※ $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ であることを忘れないで下さいね。）

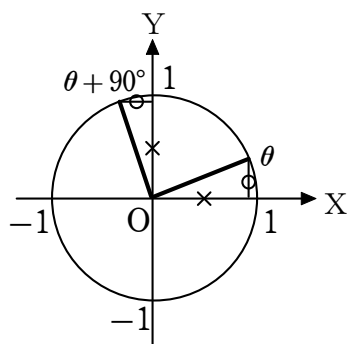
さて、ではそろそろ本題に入りましょう。左の単位円（半径が1の円）において、 x と y の長さを θ を使って表すと、



どのように表されるでしょうか。勿論、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ ですね。

つまり、単位円において動く半径（動径と言います。左図の太線の半径のことです。）の先端（黒い点で表されたところ）の x 座標を $\cos \theta$, y 座標を $\sin \theta$

と見なすことが出来ます。このように単位円で三角比を定義し直すと、多くの公式を単位円から導くことが出来ます。



では、左の円で $\cos(\theta + 90^\circ)$, $\sin(\theta + 90^\circ)$, $\tan(\theta + 90^\circ)$ を、それぞれ θ の三角比で表すとどうなるでしょうか。

まず、 $\cos(\theta + 90^\circ)$ ですが、 $\cos$ は動径の先端の x 座標ですから、図の $\circ$ を付けた線分の長さに相当します。しかもその符号は負です。これを θ の三角比で表すと、図では θ の角度の動径の先端の y 座標と等しいですから、 $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ となります。

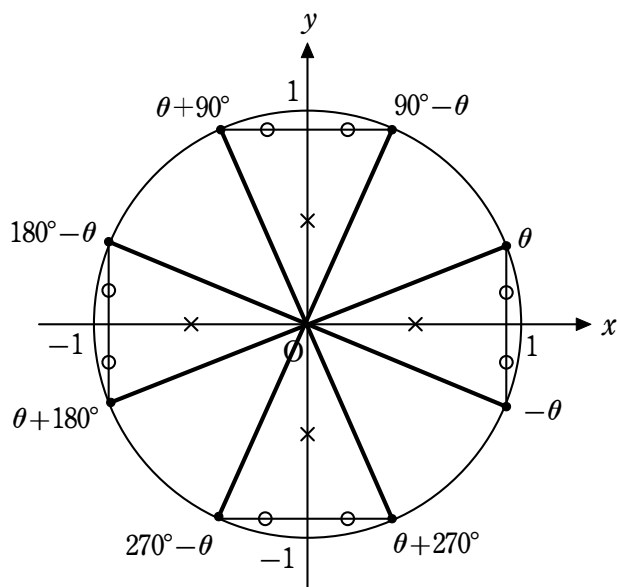
では、 $\sin(\theta + 90^\circ)$ は、どう表されるでしょうか。 $\sin$ は動径の先端の y 座標ですから、図の $\times$ を付けた線分の長さとなります。その符号は正ですね。これを θ の三角比で表すと、図では θ の角度の動径の先端の x 座標と等しいですから、

三角比と単位円

$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$ となります。では、 $\tan(\theta + 90^\circ)$ は、どうなるのでしょうか。 $\tan \theta$ と比べると、動径の先端の x 座標、 y 座標の絶対値が入れ替わっていることと、 $\cos(\theta + 90^\circ)$ の符号が負であることを考慮すると、

$\tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan \theta}$ となることが分かります。

練習 下の単位円の $\theta - 90^\circ$, $\theta + 90^\circ$, $180^\circ - \theta$, $\theta + 180^\circ$, $270^\circ - \theta$, $\theta + 270^\circ$, $-\theta$ における各三角比を、 θ の三角比で表しなさい。



$$\begin{cases} \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta \\ \sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta \\ \tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \\ \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta \\ \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta \\ \tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta \\ \sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(270^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta \\ \sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta \\ \tan(270^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$