

回転体の体積④（解答編）

【解答】 (1) 点 $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2 + t^2 \leq 6, s + t = 2, st = \sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

を満たす実数 s, t が存在することである。

$s + t = 2, st = \sqrt{2}$ から, s, t は u の 2 次方程式 $u^2 - 2u + \sqrt{2} = 0 \quad \dots\dots ②$ の 2 つの解である。

② の判別式を D とおくと $\frac{D}{4} = (-1)^2 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$

よって, ② は実数解をもたない。

ゆえに, ① を満たす実数 s, t は存在しない。

したがって, $(2, \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2) 点 (x, y) が領域 A の点であるための条件は

$$s^2 + t^2 \leq 6, s + t = x, st = y$$

を満たす実数 s, t が存在することである。

$$s^2 + t^2 \leq 6 \text{ から } (s+t)^2 - 2st \leq 6$$

$$s+t=x, st=y \text{ を代入して } x^2 - 2y \leq 6$$

$$\text{すなわち } y \geq \frac{1}{2}x^2 - 3 \quad \dots\dots ③$$

$s+t=x, st=y$ から, s, t は u の 2 次方程式 $u^2 - xu + y = 0$ の 2 つの解である。

$$\text{この方程式の判別式を } D \text{ とすると } D = x^2 - 4y$$

$$s, t \text{ が実数であるとき, } D \geq 0 \text{ であるから } x^2 - 4y \geq 0$$

$$\text{すなわち } y \leq \frac{1}{4}x^2 \quad \dots\dots ④$$

③, ④ から, 領域 A 上の点 (x, y) が満たす

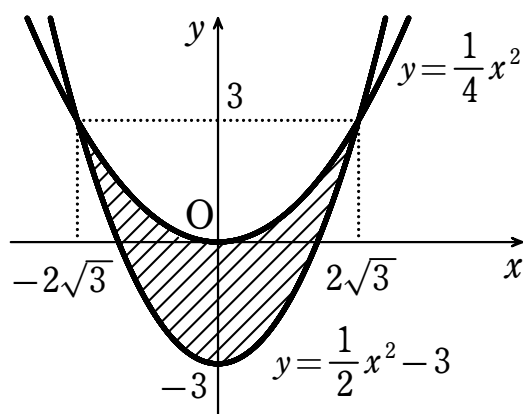
$$\text{不等式は } \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ y \leq \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3 = \frac{1}{4}x^2 \text{ とすると } x = \pm 2\sqrt{3}$$

よって, 領域 A は右の図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。

(3) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ の x 軸より下側の部分を,



x 軸に関して対称に折り返すと右の図のようになり、求める回転体の体積は、右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積である。

このとき、折り返してできる放物線

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の交点の x 座

標は、 $-\frac{1}{2}x^2 + 3 = \frac{1}{4}x^2$ を解いて $x = \pm 2$

領域 A は y 軸に関して対称であるから、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \pi \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3 \right)^2 dx + \pi \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}x^2 \right)^2 dx - \pi \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3 \right)^2 dx \right\} \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9 \right) dx + 2\pi \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{16}x^4 dx - 2\pi \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9 \right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x \right]_0^2 + 2\pi \left[\frac{1}{80}x^5 \right]_2^{2\sqrt{3}} - 2\pi \left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x \right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{112 - 48\sqrt{3} + 48\sqrt{6}}{5} \pi \end{aligned}$$

