# （入試演習）　2次曲線の基礎 ②

**問題**　座標平面において，双曲線 $C：xy=1$ 上の異なる 3 点 P，Q，R を考える。P，Q，R の $x$ 座標をそれぞれ $p$，$q$，$r$ とする。△PQR の重心を G，垂心を H とする。ただし，三角形の垂心とは各頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線が交わるただ 1 つの点のことである。

(1)　G の座標は $\left(^{ア}\boxed{\phantom{00}},\ ^{イ}\boxed{\phantom{00}}\right)$，H の座標は $\left(^{ウ}\boxed{\phantom{00}},\ ^{エ}\boxed{\phantom{00}}\right)$ である。

(2)　△PQR が正三角形である場合を考える。このとき，G と H は一致する。G の $x$ 座標を $a$ とする。

(i)　$p$，$q$，$r$ を解にもつ 3 次方程式は $x^3+{}^{オ}\boxed{\phantom{00}}x^2+{}^{カ}\boxed{\phantom{00}}x+{}^{キ}\boxed{\phantom{00}}=0$ と表される。

(ii)　△PQR の外接円と $C$ が P，Q，R 以外の共有点 S をもつとき，S の $x$ 座標は ${}^{ク}\boxed{\phantom{00}}$ である。

**問題**　(1)　双曲線 $C$ の方程式 $xy=1$ において，$x \neq 0$ であるから　$y=\dfrac{1}{x}$

双曲線 $C$ 上の 3 点 P，Q，R の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{p}\right),\ \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{1}{q}\right),\ \mathrm{R}\left(r,\ \frac{1}{r}\right)$$

よって，三角形 PQR の重心 G の

$x$ 座標は　$\dfrac{p+q+r}{3}$

$y$ 座標は　$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\right)=\dfrac{pq+qr+rp}{3pqr}$

ゆえに，重心 G の座標は　$\left(^{ア}\dfrac{p+q+r}{3},\ ^{イ}\dfrac{pq+qr+rp}{3pqr}\right)$

直線 QR の傾きは　$\dfrac{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{q}}{r-q}=-\dfrac{1}{qr}$

よって，点 P を通り，直線 QR に垂直な直線の方程式は

$$y-\frac{1}{p}=qr(x-p)\qquad \text{すなわち}\qquad y=qrx-pqr+\frac{1}{p}\quad \cdots\cdots ①$$

また，直線 PR の傾きは　$\dfrac{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}}{r-p}=-\dfrac{1}{rp}$

よって，点 Q を通り，直線 PR に垂直な直線の方程式は

$$y-\frac{1}{q}=rp(x-q)\qquad \text{すなわち}\qquad y=rpx-pqr+\frac{1}{q}\quad \cdots\cdots ②$$

①，② から $y$ を消去して　$qrx-pqr+\dfrac{1}{p}=rpx-pqr+\dfrac{1}{q}$

すなわち　$r(q-p)x=\dfrac{p-q}{pq}$

ここで，3 点 P，Q，R は双曲線 $xy=1$ 上の異なる 3 点であるから　$p \neq q$，$r \neq 0$

ゆえに　$x=-\dfrac{1}{pqr}$

これを ① に代入して　$y=qr\cdot\left(-\dfrac{1}{pqr}\right)-pqr+\dfrac{1}{p}$　すなわち　$y=-pqr$

よって，垂心 H の座標は　$\left({}^{ウ}-\dfrac{1}{pqr},\ {}^{エ}-pqr\right)$

(2)　(i)　(1) より　$a=\dfrac{p+q+r}{3}$　すなわち　$p+q+r=3a$　……③

G と H が一致するとき　$\dfrac{p+q+r}{3}=-\dfrac{1}{pqr}$　……④

$$\frac{pq+qr+rp}{3pqr}=-pqr\quad\cdots\cdots⑤$$

③，④ から　$\dfrac{3a}{3}=-\dfrac{1}{pqr}$　すなわち　$pqr=-\dfrac{1}{a}$　……⑥

⑤，⑥ から　$\dfrac{pq+qr+rp}{3\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=-\left(-\dfrac{1}{a}\right)$

すなわち　$pq+qr+rp=-\dfrac{3}{a^2}$　……⑦

③，⑤，⑦ より，解と係数の関係から，$p$，$q$，$r$ を解にもつ 3 次方程式は

$$x^3+({}^{オ}-3a)x^2+\left({}^{カ}-\frac{3}{a^2}\right)x+{}^{キ}\frac{1}{a}=0$$

(ii)　△PQR は正三角形であるから，重心と外心は一致する。

⑤，⑥ から，重心 G の $y$ 座標は　$\dfrac{1}{a}$

よって，重心 G の座標は　$\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$

ここで，△PQR の外接円の半径の長さは PG であり　$\mathrm{PG}^2=(a-p)^2+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{p}\right)^2$

ゆえに，△PQR の外接円の方程式は

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2=(a-p)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right)^2$$

これに $y=\dfrac{1}{x}$ を代入して　$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)^2=(a-p)^2+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{p}\right)^2$

両辺を展開して整理すると　$x^2-2ax+\left(-p^2+2ap+\dfrac{2}{ap}-\dfrac{1}{p^2}\right)-\dfrac{2}{ax}+\dfrac{1}{x^2}=0$

両辺に $x^2$ を掛けて　$x^4-2ax^3+\left(-p^2+2ap+\dfrac{2}{ap}-\dfrac{1}{p^2}\right)x^2-\dfrac{2x}{a}+1=0$

点 S の $x$ 座標を $s$ とすると，この方程式の解は $x=p$，$q$，$r$，$s$ であるから，(i) の結果より　$x^4-2ax^3+\left(-p^2+2ap+\dfrac{2}{ap}-\dfrac{1}{p^2}\right)x^2-\dfrac{2x}{a}+1$

$$=\left(x^3-3ax^2-\frac{3}{a^2}x+\frac{1}{a}\right)(x-s)$$

これは $x$ についての恒等式であるから，両辺の定数項を比較して　$1=-\dfrac{s}{a}$

したがって，S の $x$ 座標は　$s={}^{ク}-a$