

(共通テスト対策 25)

問題 1つの袋に1から9までの数字が1つずつ書かれた9個のボールが入っている。この中から3個のボールを同時に取り出し、ボールに書かれた数字を記録してもとの袋に戻す。この試行を n 回繰り返し、記録した $3n$ 個の数字の和が3の倍数となる確率を P_n とする。ただし、ボールを取り出す確率は同様に確からしい。

- (1) 1回の試行で取り出した3個のボールに書かれた数字すべてが、3の倍数となる確率、3で割って1余る数となる確率、3で割って2余る数となる確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 1回の試行で取り出した3個のボールに書かれた数字の和が、3で割って1余る数となる確率を求めよ。
- (3) P_1, P_2 の値を求めよ。
- (4) P_{n+1} と P_n の関係式を求めよ。
- (5) P_n を n の式で表せ。

解答 (1) ボールの数字について

$$A=\{3, 6, 9\}, B=\{1, 4, 7\}, C=\{2, 5, 8\}$$

とすると、1回の試行で A, B, C のそれぞれから3個の数字が出る確率はすべて等しく $\frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$

- (2) 適する数字の出方には、次の3つの場合がある。

A から2個, B から1個出る

A から1個, C から2個出る

B から2個, C から1個出る

$$\text{よって、求める確率は } \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_2 + {}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$$

- (3) 1回の試行で、3個の数字の和が3の倍数になるのは、(1)の場合と A, B, C から1個ずつ出る場合があるから

$$P_1 = 3 \times \frac{1}{84} + \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{1}{28} + \frac{9}{28} = \frac{5}{14}$$

また、1回の試行で3個の数字の和が3で割って1余る確率 Q_1 は(2)より $Q_1 = \frac{9}{28}$

$$3 \text{ で割って } 2 \text{ 余る確率 } R_1 \text{ は } R_1 = 1 - (P_1 + Q_1) = 1 - \left(\frac{5}{14} + \frac{9}{28} \right) = \frac{9}{28}$$

$$\text{よって } P_2 = P_1 \times P_1 + Q_1 \times R_1 + R_1 \times Q_1 = \left(\frac{5}{14} \right)^2 + 2 \left(\frac{9}{28} \right)^2 = \frac{100 + 162}{28^2} = \frac{131}{392}$$

- (4) $P_1 = \frac{5}{14}$, $Q_1 = R_1 = \frac{9}{28}$ であるから、(3)と同様に考えると

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{5}{14} + (1 - P_n) \times \frac{9}{28} = \frac{1}{28} P_n + \frac{9}{28}$$

- (5) $P_{n+1} = \frac{1}{28} P_n + \frac{9}{28}$ を変形すると $P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{28} \left(P_n - \frac{1}{3} \right)$

よって、数列 $\left\{ P_n - \frac{1}{3} \right\}$ は、初項 $P_1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{14} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42}$ 、公比 $\frac{1}{28}$ の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{42} \left(\frac{1}{28} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad P_n = \frac{1}{42} \left(\frac{1}{28} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$