

問題 e は自然対数の底とし、 c を正の定数とする。

- (1) 方程式 $x = ce^{-x}$ は、 $0 < x < c$ でただ1つの解をもつことを示せ。
- (2) $a \geq 0$, $b \geq 0$ に対して、不等式 $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$ が成り立つことを示せ。
- (3) (1) の方程式の解を α とし、数列 $\{x_n\}$ を、 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = ce^{-x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。このとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、不等式 $|x_{n+1} - \alpha| \leq c|x_n - \alpha|$ が成り立つことを示せ。
- (4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について、 $0 < c < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を示せ。