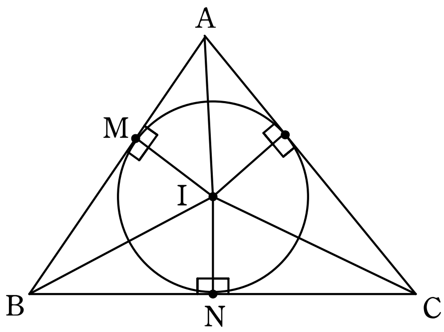
ベクトルを利用した内心を求める問題

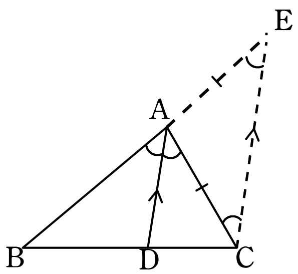
【三角形の内心は何の交点か】

三角形の内心とは、勿論、三角形の内接円の中心ですが、まず、内心が何の交点なのかを確認しておきましょう。下の図は、円が三角形に内接している状態を表したものですが、図中の△MBIと△NBIに着目して下さい。円の半径は等しいですから IM＝INが成り立ち、IBは共通で、更に∠IMB＝∠INB＝90° ですから、「斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい」という直角三角形の合同条件を満たすので、△MBI≡△NBI となります。つまり、∠MBI＝∠NBI がなり立ちます。他の２組の直角三角形についても同様のことが成り立ちますから、三角形の内心は、３つの内角の二等分線の交点であると分かります。



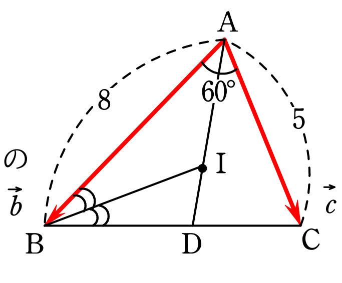
【三角形の角の２等分線の持つ性質】

次に三角形の角の２等分線の持つ性質について確認しましょう。三角形において、角の２等分線は対辺を両側の辺の比に内分するという性質があります。それは次のように証明することが出来ます。左図において、∠BACの２等分線が対辺BCと交わる点をDとします。辺BAの延長点CからDAに対して平行に引いた直線との交点をEとすると、平行線の同位角や錯角は等しいので、∠ACE＝∠AECとなり、△ACEは二等辺三角形となります。このとき、平行線と線分の比の関係より、AB：AE＝BD：CD が言え、更にそこから AB：AC＝BC：CDが成り立つと言えます。



さあ、ここまで分かったら、いよいよ本番です。一緒に次の問題を解いて見ましょう。

問題 AB=8，AC=5，∠BAC=60° の三角形があり、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とします。△ABCの内心をＩとしたとき、$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表しなさい。



解答 AD は ∠BAC の２等分線だから、BD：DC＝AB：AC＝8：5 になります。

よって、$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5\vec{b}+8\vec{c}}{8+5}=\dfrac{5}{13}\vec{b}+\dfrac{8}{13}\vec{c}$ と表せます。次に余弦定理を使って BC 長さを求めます。$BD^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos60^\circ=49$ $\therefore BD=7$

更に、BDの長さを求めると、$7\times\dfrac{8}{13}=\dfrac{56}{13}$

このとき、AI:ID＝AB：BD＝8：$\dfrac{56}{13}$＝13：7 となり、

$$\overrightarrow{AI}=\frac{13}{20}\overrightarrow{AD}=\frac{13}{20}\left(\frac{5}{13}\vec{b}+\frac{8}{13}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$ となる。