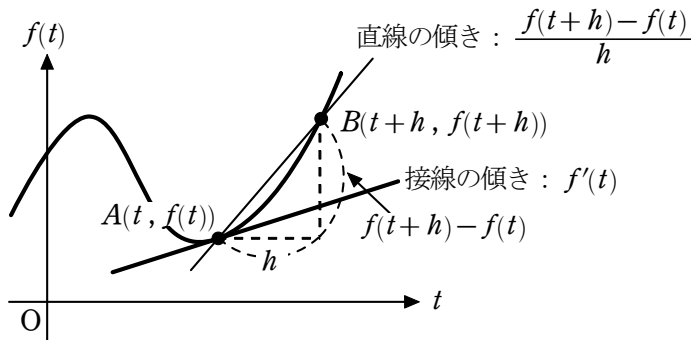


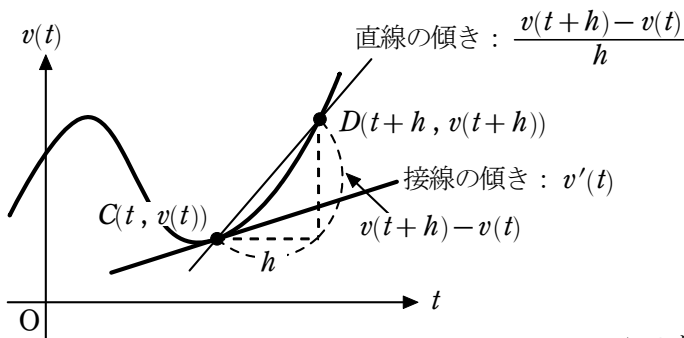
(考え方の基本)



左のグラフは横軸が時間 t 、縦軸が位置 $f(t)$ を表す。
左図において、直線ABの傾きは $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で、
分母が時間の増加量、分子が位置の増加量を表すから、2点A, B間の「平均の速度」と表すと言える。

このとき、 $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ と定義すると、 $f'(t)$

は、時刻 t における「瞬間の速度」を表すと言える。つまり、位置を時間 t で微分すると速度が求まることになる。

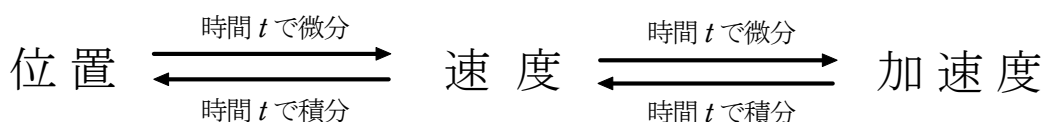


次のグラフを見て欲しい。上のグラフと異なるのは、縦軸が速度 $v(t)$ となっていることである。

直線CDの傾きは $\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ で、分母は時間の増加量、分子は速度の増加量を表すから、2点C, D間の「平均の加速度」を表すと言える。

このとき、 $v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ と定義すると、 $v'(t)$

は、時刻 t における「瞬間の加速度」を表すと言える。つまり、速度を時間 t で微分すると加速度が求まることになる。



問題 数直線上に点Pがあり、その時刻 t における位置 $f(t)$ は、 $f(t) = -5t^2 + 30t$ で表される。点Pの $t=2$ における位置と、その時の速度を求めなさい。また、点Pは $t \geq 0$ において、最初は数直線の正方向に向かって動いているが、途中から向きを変えて数直線の負方向に向かって動き始める。点Pが向きを変える時刻を言いなさい。更に、 $0 \leq t \leq 10$ における総移動距離を求めなさい。

解答 まず、 $t=2$ における位置は $f(2) = -20 + 60 = 40$ (原点か+方向に40のところ) で、速度については、 t 秒後の速度が $f'(t) = -10t + 30$ だから、 $f'(2) = -20 + 30 = 0$ (注通常ならば、単位として m/秒 が使われているが、この問題では単位が示されていないので数字だけとする) である。また $t \geq 0$ において、途中から向きを変える時刻は、速度が0になるときだから、 $-10t + 30 = 0$ より $t = 3$ となる。また、 $0 \leq t \leq 10$ における総移動距離 (「道のり」のことですね) は、正方向に動いたときも負方向に動いたときも全て加算されるので、

$$\int_0^{10} |-10t + 30| dt = \int_0^3 (-10t + 30) dt + \int_3^{10} (10t - 30) dt = \left[-5t^2 + 30t \right]_0^3 + \left[5t^2 - 30t \right]_3^{10}$$

位置・速度・加速度の考え方

$$= -45 + 90 - 0 + 500 - 300 - (45 - 90) = 290 \text{ となる。}$$

(応用編) 前半の話は、数直線上における点の運動についての話ですが、平面上の運動については少々話が違います。まず、平面上の動きについては x 成分と y 成分について分けて考えます。時刻 t における点 P の位置について、 x 成分、 y 成分がそれぞれ $x=f(t)$ 、 $y=g(t)$ で表されるとします。その時の速度を $\vec{v}$ とすると、 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と表されることになります。数直線上の運動と同様、 $a \leq t \leq b$ における道のりについては、運動の向きに拘わらず動いた行程の全てを考慮して加算することになるから、 $\int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$ で求められます。

また、 $y=f(x)$ について、 $a \leq x \leq b$ における曲線の長さについては、上記の特別な場合で、 $x=t$ 、 $y=f(t)$ と考えれば良いから、 $\int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$ で求まることになります。

問題 xy 平面上を動く点 $P(x, y)$ の時刻 t における位置が $x = 1 + \frac{5}{4}t^2$ 、 $y = 1 + t^{\frac{5}{2}}$ ($t \geq 0$) で与えられているとする。

(1) 点 P の描く曲線の接線の傾きが1となる時刻 t_0 を求めよ。

(2) 点 P が時刻 $t=0$ から $t=t_0$ までに動く道のりを求めよ。 (愛媛大学)

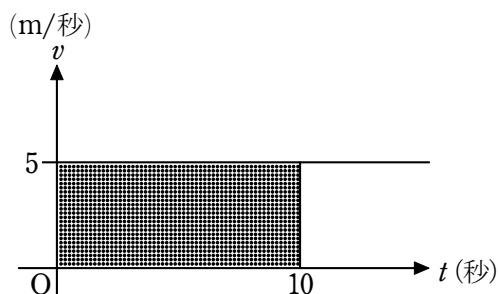
$$(1) \text{ 解答 } \frac{dx}{dt} = \frac{5}{2}t, \frac{dy}{dt} = \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} \text{ より } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2}t} = t^{\frac{1}{2}} \quad \frac{dy}{dx} = 1 \text{ より } t^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ より } t_0 = 1$$

$$(2) \text{ 解答 } \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{5}{2}t \right)^2 + \left(\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} \right)^2} dt = \frac{5}{2} \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^3} dt = \frac{5}{2} \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt$$

$$\sqrt{1+t} = s \text{ において両辺を2乗すると } 1+t = s^2 \text{ 両辺を } s \text{ で微分して } \frac{dt}{ds} = 2s \text{ また } \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline s & 1 \rightarrow \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって (求める道のり)} &= \frac{5}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (s^2 - 1)s \cdot 2s ds = 5 \int_1^{\sqrt{2}} (s^4 - s^2) ds = 5 \left[\frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{3}s^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 5 \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = 5 \left(\frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15} \right) = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

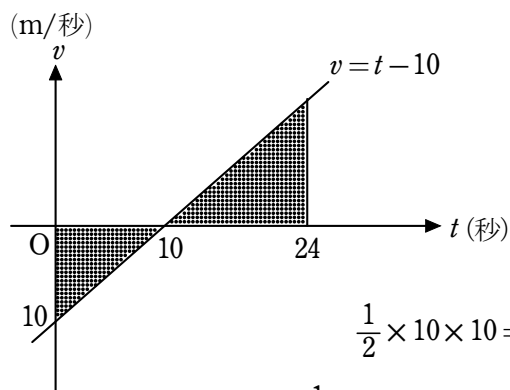
補足 「位置の変位」と「道のり」の違いについて



左の図は、横軸が時間 (秒)、縦軸が速度 (m/秒) のグラフです。今、正の速度を持った物体が秒速5mで10秒間運動したとき、その移動距離がどれだけになるかをグラフに表してありますが。どの部分にそれが表されているか分かるかな。実は、長方形の面積の部分にそれにあたります。その移動距離は $5 \text{ m/秒} \times 10 \text{ 秒} = 50 \text{ m}$ となり、それは速度を時間で積分す

位置・速度・加速度の考え方

ることによっても求めることが出来ます。つまり、 $\int_0^{10} 5 dt = \left[5t \right]_0^{10} = 50 - 0 = 50 \text{ (m)}$ となりますね。さて、次のグラフではどうでしょうか。



この図におけるグラフでは、速度 $v \text{ (m/秒)}$ は、時間 $t \text{ (秒)}$ の一次関数 $v = t - 10$ として表されています。この速度をそのまま時間 $t \text{ (} 0 \leq t \leq 24 \text{)}$ で積分したらどうなるでしょうか。

$$\int_0^{24} (t - 10) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 - 10t \right]_0^{24} = 288 - 240 = 48 \text{ (m)} \text{ となります。}$$

実はこの計算の意味は、 $0 \leq t \leq 10$ の範囲で、この物体は負の速度を持ち、 $t = 0$ の時に居た場所から負の方向に

$\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ (m)}$ だけ進み、その後、 $10 \leq t \leq 24$ の範囲では正の速度を持って、

今度は正の方向に $\frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98 \text{ (m)}$ だけ進み、24秒間で差し引き48mだけ $t = 0$ の時に居た場所から正方向に移動したことを表しています。つまり速度をそのまま時間で積分すると位置の変位（最初に居たところから、正負のどちらにどれだけ移動したか）が求まることになります。では、道のり（負方向と正方向に移動した総移動距離）を求めるには、どうすれば良いのでしょうか。それには、速度の絶対値、つまり「速さ」を時間で積分すれば良いのです。この問題で、実際、24秒間で移動した道のりがどれだけかを求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^{24} |t - 10| dt &= \int_0^{10} (-t + 10) dt + \int_{10}^{24} (t - 10) dt = \left[-\frac{1}{2} t^2 + 10t \right]_0^{10} + \left[\frac{1}{2} t^2 - 10t \right]_{10}^{24} \\ &= -50 + 100 + 288 - 240 - (50 - 100) = 148 \text{ (m)} \text{ となります。} \end{aligned}$$

(ポイント)

- ① 速度を時間で積分すると位置の変位が求まる
- ② 速度の絶対値、つまり速さを時間で積分すると道のりが求まる。