

群数列は高校生が苦手とする分野の筆頭に位置します。とは言え、典型的な問題を何問かきちんと解き方を研究し、しっかり繰り返せば、大抵の問題は解けるようになります。難しいからと諦めず、粘り強く取り組んで下さい。

例題 自然数の列を次のような群に分ける。

{1}, {2, 3}, {4, 5, 6, 7}, {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, ... (1) 第 n 群の最初の数求めよ。

(2) 500 は第何群の第何項か。 (3) 第 n 群に入る数の和を求めよ。

(問) 次の空欄に適語、あるいは式を入れなさい。

(1) この群数列は第 1 群に 1 個、第 2 群に 2 個、第 3 群に 2^2 個、第 4 群に 2^3 個の項を持つ。よって、第 n 群に $\square$ 個の項を持つことになり、第 1 群から第 $(n-1)$ 群の最後までに $1+2+2^2+2^3+\dots+\square$ 、つまり合計 $\square$ 個の項を持つから、第 n 群の最初の項は第 1 群の項から数えて $\square$ 番目の項と言える。ところで数列自体は自然数の数列だから、 $\square$ 番目の項である第 n 群の最初の項は $\square$ であると言える。

答 第 n 群に 2^{n-1} 個、 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-2}$ 、つまり合計 $\frac{1 \times (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$ (個)

$(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1}$ (番目) の項、 2^{n-1} 番目、第 n 群の最初の項は 2^{n-1}

(2) 第 n 群の最初の項が $\square$ だから、第 $(n+1)$ 群の最初の項は $\square$ である。もし、500 が第 n 群の項なら、500 はその 2 つの項の間にあることになり、 $\square \leq 500 < \square$ という不等式が成り立つ。これを満たす自然数 n は $\square$ だから、500 は第 $\square$ 群の項と言え、第 $\square$ 群の最初の項が $\square$ であることより、500 は第 $\square$ 群の第 $\square$ 項だと言える。

答 第 n 群の最初の項が 2^{n-1} 、第 $(n+1)$ 群の最初の項は 2^n 、 $2^{n-1} \leq 500 < 2^n$ 、自然数 n は 9

500 は第 9 群の項、第 9 群の最初の項が $2^8 = 256$ 、500 は第 9 群の第 245 項

(3) 第 n 群の最初の項は $\square$ で、第 n 群の最後の項は、第 $(n+1)$ 群の最初の項の $\square$ より 1 だけ小さいから $\square$ となる。ところで、第 n 群の項数は $\square$ だから、第 n 群に入る数の和は、初項が $\square$ 、末項が $\square$ 、項数が $\square$ の等差数列の和となり、それを求めると $\square$ となる。

答 第 n 群の最初の項は 2^{n-1} 、第 n 群の最後の項は、第 $(n+1)$ 群の最初の項の 2^n より 1 だけ小さいから $2^n - 1$ となる

第 n 群の項数は 2^{n-1} 、初項が 2^{n-1} 、末項が $2^n - 1$ 、項数が 2^{n-1}

$$\frac{2^{n-1}(2^{n-1} + 2^n - 1)}{2} = 2^{n-2} \{2^{n-1}(1 + 2) - 1\} = 2^{n-2} (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$$

例題 数列 1, 1, 4, 1, 4, 9, 1, 4, 9, 16, 1, 4, 9, 16, 25, がある。この数列の第 100 項および初項から第 100 項までの和を求めよ。

(問) 次の空欄に適語、あるいは式を入れなさい。

この数列を、次のように第 n 群が n 個の数を含むように分ける。

$\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 4, 9\}, \{1, 4, 9, 16\}, \{1, 4, 9, 16, 25\}, \dots$ これを見ると分かるように、第 n 群に $\square$ 個の項があるので、第 1 群の項から、第 n 群の最後の項までの項数は $1+2+\dots+\square$ より $\square$ となる。もし、第 100 項が第 n 群の項なら $\square < 100 \leq \square$ という不等式が成り立つ。これを満たす自然数は $\square$ だから、第 100 項は第 $\square$ 群の項と言える。ところで、第 $\square$ 群の最後の項は、第 1 群から数えて第 $\square$ 番目の項なので、第 100 項は第 $\square$ 群の $\square$ 番目である。よって、それは $\square$ となる。また、第 k 群の項の和は $1^2+2^2+\dots+k^2=\square$ したがって、第 1 群から第 $\square$ 群の最後の項までの和は $\sum_{k=1}^{\square} \square = \square$ よって、初項から第 100 項までの和は $\square + (1^2+2^2+\dots+\square^2) = \square$

図 第 n 群に n 個の項がある、第 1 群の項から、第 n 群の最後の項までの項数は $1+2+\dots+n$ より $\frac{1}{2}n(n+1)$ となる

もし、第 100 項が第 n 群の項なら $\frac{1}{2}n(n-1) < 100 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, これを満たす自然数は 14, 第 100 項は第 14 群の項

第 13 群の最後の項は $\frac{1}{2} \times 14 \times 13 = 91$ より、第 1 群から数えて第 91 番目の項なので、第 100 項は第 14 群の 9 番目,

$9^2 = 81$, 第 k 群の項の和は $1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

第 1 群から第 13 群の最後の項までの和は $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{13} \frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k)$

$$= \frac{1}{6} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \right\}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 27 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 3185$$

初項から第 100 項までの和は $3185 + (1^2+2^2+\dots+9^2) = 3185 + \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 = 3470$

例題 数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ において、初項から第 800 項までの和を求めよ。

(問) 次の空欄に適語、あるいは式を入れなさい。

この数列を、次のように群に分けると、第 n 群には n 個の項があると分かる。

$\left\{\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \dots$ このとき、第 1 群から第 n 群の最後の項までに項は全部で

$1+2+3+\dots+\square$, つまり $\square$ 個ある。 よって、第 800 項が第 n 群の項だとすると、 $\square < 800 \leq \square$ が成り立つ。これを満たす自然数 n の値は $\square$ だから、第 800 項は第 $\square$ 群の項であると分かる。ところで、第 $\square$ 群の最後の項は、第 1 群から数えて $\square$ 番目の項だから、第 800 項は第 $\square$ 群の $\square$ 番目の項であり、それは $\square$ となる。ところで第 k 群の項の和は

$\frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1} + \frac{3}{k+1} + \dots + \frac{k}{k+1} = \square$ となるので、初項から第 800 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n \square + (\square + \square + \cdots + \square) = \square \text{ となる。}$$

図 第 n 群には n 個の項がある，全部で $1+2+3+\cdots+n$ ，つまり $\frac{1}{2}n(n+1)$ (個)

$\frac{1}{2}n(n-1) < 800 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ ，これを満たす自然数 n の値は40だから、第800項は第40群の項だと分かる。

第39群の最後の項は、第1群から数えて780番目の項だから、第800項は第40群の20番目の項であり、それは $\frac{20}{41}$ とな

$$\text{る。}, \quad \frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1} + \frac{3}{k+1} + \cdots + \frac{k}{k+1} = \frac{\frac{1}{2}k(k+1)}{k+1} = \frac{1}{2}k,$$

$$\sum_{k=1}^{39} \frac{1}{2}k + \left(\frac{1}{41} + \frac{2}{41} + \cdots + \frac{20}{41} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 40 + \frac{1}{41} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 390 + \frac{210}{41} = \frac{16200}{41} \text{ となる。}$$