１の３乗根のマスター

by Aokijuku

皆さんは、１の３乗根って何か分かりますか。そうですね。３乗すると１になる数字のことです。式を使って表すと、$x^3=1$ を満たす x の値ということになるます。では、それを求めてみましょう。

まず、１を左辺に移項して　$x^3-1=0$　次に因数分解して　$(x-1)(x^2+x+1)=0$　この方程式の解は $x-1=0$ と $x^2+x+1=0$ の両方から出てきますから、求める x の値は　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

となります。つまり、１の３乗根とは　$1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ の３個となります。ところで、１の３乗根にはとても面白い性質があります。１の３乗根のうち、虚数解の一方である $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を２乗してみましょう。

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$　何と、もう一方の虚数解になっちゃいました。では、もう一方の虚数解も２乗してみましょう。　$\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}\,i-3}{4}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

やはり、こちらももう一方の虚数解になりましたね。つまり、こういうことです。もし、１の３乗根のうち、虚数のものの一方とω（オメガ）という文字で表したとすると、もう一方は ω^2 で表すことが出来るということです。このωですが、３乗根の話になると必ず出てくる文字ですから、是非、覚えておいて下さいね。

ところで、ωにはとても大切な性質があります。ωは $x^3=1$ の解なのですから、当然、その方程式を満たし、$\omega^3=1$ が成り立ちます。また、ωの値は $x^2+x+1=0$ を解いて求めたのだから、当然、この方程式を満たし $\omega^2+\omega+1=0$ が成り立ちます。以上をまとめると、次のようになります。

「１の３乗根、つまり $x^3=1$ の解のうち、虚数解の一方をωで表すと、他方の虚数解は ω^2 で表され　$\omega^3=1$ また　$w^2+\omega+1=0$ が成り立つ。」

では、ωを使った代表的な問題をいくつか解いて見ましょう。

（問題①）１の３乗根のうち、虚数であるものの１つをωで表すとき、次の３つの式の値を求めなさい。

$\omega^6+\omega^3+1$，$\omega^{100}+\omega^{50}$，$\omega^{200}+\omega^{100}$

$\boxed{\text{解答}}$ ωは１の３乗根だから、$x^3=1$ を満たし $w^3=1$ が成り立つ。また、$x^3-1=0$ より $(x-1)(x^2+x+1)=0$ つまり、ω は $x^2+x+1=0$ を満たし $\omega^2+\omega+1=0$を満たす。

このとき　$\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1+1+1=3$

また　$\omega^{100}+\omega^{50}=(w^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=(\omega^2+\omega+1)-1=0-1=-1$

更に　$\omega^{200}+\omega^{100}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{33}\cdot\omega=\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1=0-1=-1$

（問題②）方程式　$x^3=4$ を解きなさい。

$\boxed{\text{解答}}$ $x=\sqrt[3]{4}\,t$ とおいて与式に代入すると　$(\sqrt[3]{4}\,t)^3=4$　$4t^3=4$　$t^3=1$　$t=1,\ \omega,\ \omega^2$

よって $x=\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{4}\,\omega,\ \sqrt[3]{4}\,\omega^2$（但し、$\omega$は１の３乗根のうち、虚数のものの１つ。）

（入試演習）１の３乗根のうち，虚数であるものの１つを ω とする。このとき，

1の3乗根のマスター

by Aokijuku

$\omega^2+\omega=$ ア $\boxed{}$，$\omega^{10}+\omega^5=$ イ $\boxed{}$，$\dfrac{1}{\omega^{10}}+\dfrac{1}{\omega^5}+1=$ ウ $\boxed{}$，$(\omega^2+5\omega)^2+(5\omega^2+\omega)^2=$ エ $\boxed{}$ である。

（関西大学）

解答 $\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1=0-1=-1$ （ア）

$\omega^{10}+\omega^5=(\omega^3)^3\cdot\omega+\omega^3\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=(\omega^2+\omega+1)-1=0-1=-1$ （イ）

$\dfrac{1}{\omega^{10}}+\dfrac{1}{\omega^5}+1=\dfrac{\omega^2}{(\omega^3)^4}+\dfrac{\omega}{(\omega^3)^2}+1=\omega^2+\omega+1=0$ （ウ）

$(\omega^2+5\omega)^2+(5\omega^2+\omega)^2=\omega^4+10\omega^3+25\omega^2+25\omega^4+10\omega^3+\omega^2=\omega+10+25\omega^2+25\omega+10+\omega^2$

$=20+26(\omega^2+\omega)=20+26(\omega^2+\omega+1)-26=20+0-26=-6$ （エ）