

(入試演習)

積分とその応用

【問題】 座標平面上の曲線 $(x-y)^2 - 2(x+y) = 0$ を C とする。

- (1) 関数 $f(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1})$ に対して、導関数 $\frac{d}{dt}f(t)$ を求めよ。
- (2) 等式 $\frac{d}{dt}(t\sqrt{t^2 + 1}) = a\sqrt{t^2 + 1} - \frac{b}{\sqrt{t^2 + 1}}$ が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。また、不定積分 $\int \sqrt{t^2 + 1} dt$ を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 (x, y) に対して、 $x - y = t$ とおいて、 x と y をそれぞれ t で表せ。
- (4) 曲線 C 上の点のうち、 x 座標の値が最小である点を P 、 y 座標の値が最小である点を Q とする。2点 P, Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (5) 曲線 C のうち、(4)の2点 P と Q の間の部分を D とする。曲線 D の長さを求めよ。

【解答】 (1) $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\right) = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$

(2) $\frac{d}{dt}(t\sqrt{t^2 + 1}) = \sqrt{t^2 + 1} + t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}$
$$= \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} = 2\sqrt{t^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

よって $a = 2, b = 1$

また $\sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt}(t\sqrt{t^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right\}$

したがって、(1)の結果から $\int \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \{ t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) \} + C$ (C は積分定数)

(3) $x - y = t$ を曲線の式に代入すると $t^2 - 2(x + y) = 0$

すなわち $x + y = \frac{t^2}{2}$ よって、 $x - y = t$ と連立して $x = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}, y = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}$

(4) (3)の結果から $x = \frac{1}{4}(t+1)^2 - \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}(t-1)^2 - \frac{1}{4}$

ゆえに、 $t = -1$ で x は最小値 $-\frac{1}{4}$ をとるから、 P の座標は $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

また、 $t = 1$ で y は最小値 $-\frac{1}{4}$ をとるから、 Q の座標は $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

(5) (3)の結果から $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(t+1), \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(t-1)$

ゆえに $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 + 2t + 1) + \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$

よって、求める長さを L とすると、(2)の結果から

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 1)} dt = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t\sqrt{t^2 + 1} + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right]_0^1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$