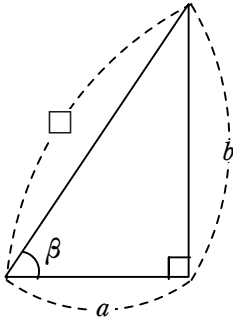


三角関数の合成

by Aokijuku

【1】 次の各問に答えなさい。



①左図の□の長さを言いなさい。

②左図で $\cos \beta$ の値を a, b で表しなさい。

③左図で $\sin \beta$ の値を a, b で表しなさい。

【解答】 ① $\sqrt{a^2 + b^2}$ ② $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ③ $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

【2】 上の図を利用して、次の□に適する式を入れなさい。

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \times \square + \cos \alpha \times \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos \square + \cos \alpha \sin \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\square) \end{aligned}$$

【解答】 順に、 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, β , β , $\alpha + \beta$

※これを三角関数の合成といいます。実は加法定理の応用に過ぎないんですね。合成が特別なものではないことを、理解して欲しいと思います。次にコサインの合成をしてみましょう

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \sin \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \times \square + \sin \alpha \times \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \square + \sin \alpha \sin \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\square) \end{aligned}$$

【解答】 順に、 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, β , β , $\alpha - \beta$

【3】 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1) $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

(2) $\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$

(3) $\sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$

【解答】

(1) $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ であるから $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(-\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$

$$= 2\left(\sin \theta \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \theta \sin \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$

(2) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ であるから $\frac{1}{2}\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \theta = \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3}$

$$= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

(3) $\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ であるから $\sqrt{6}\sin \theta - \sqrt{2}\cos \theta = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta - \frac{1}{2}\cos \theta\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\sin \theta \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos \theta \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$