入試演習　(確率漸化式①)　　解答編

［2018 京都産業大］

さいころを1回投げて2点を獲得する確率は $\frac{1}{6}$，1点を獲得する確率は $\frac{5}{6}$ である。

(1)　$a_1+a_2+a_3=5$ となるのは，3回中2点を2回，1点を1回獲得する場合であるから，

その確率は　$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=^{ア}\ \frac{5}{72}$

また，$a_1+a_2+a_3+a_4=5$ となるのは，4回中2点を1回，1点を3回獲得する場合で

あるから，その確率は　$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=^{イ}\ \frac{125}{324}$

(2)　p_1 は，1回目で1点を獲得する確率であるから　$p_1=^{ウ}\ \frac{5}{6}$

p_2 は，さいころを2回投げて1点，2点を1回ずつ獲得する確率であるから

$$ {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1=^{エ}\ \frac{5}{18}$$

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+a_{n+1}$ が奇数となるのは，

　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ が奇数であり，$(n+1)$ 回目に2点を獲得する場合　と

　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ が偶数であり，$(n+1)$ 回目に1点を獲得する場合

があり，これらは互いに排反である。

よって　$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{6}+(1-p_n)\times\frac{5}{6}=^{オ}\ -\frac{2}{3}p_n+\frac{5}{6}$

変形すると　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad ゆえに\qquad p_n=^{カ}\ \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

［2013 東北大］

k 回目の操作で取り出した玉に書かれている数字を X_k とし，$S_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ とする。

(1)　1回目の操作で終了するのは，$X_1=3$ のときであるから　$p_1=\frac{1}{5}$

2回目の操作で終了するのは

$(X_1,\ X_2)=(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (4,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 4)$

のときであるから　$p_2=8\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$

(2)　n 回目の操作をし，かつ，S_n が3で割って1余る数である確率を q_n とする。ただし，$n\geqq1$ とする。

また，n 回目の操作をし，かつ，S_n が3で割って2余る数である確率を r_n とする。

ただし，$n\geqq1$ とする。

このとき　$q_1=\dfrac{2}{5}$，$r_1=\dfrac{2}{5}$

$(n+1)$ 回目の操作をし，S_{n+1} が 3 で割って 1 余る数となるのは，

[1]　n 回目の操作をし，S_n が 3 で割って 1 余る数であり，$X_{n+1}=3$ である

[2]　n 回目の操作をし，S_n が 3 で割って 2 余る数であり，$X_{n+1}=2$，5 である

のいずれかの場合であるから　$q_{n+1}=\dfrac{1}{5}q_n+\dfrac{2}{5}r_n$　……①

$(n+1)$ 回目の操作をし，S_{n+1} が 3 で割って 2 余る数となるのは，

[3]　n 回目の操作をし，S_n が 3 で割って 1 余る数であり，$X_{n+1}=1$，4 である

[4]　n 回目の操作をし，S_n が 3 で割って 2 余る数であり，$X_{n+1}=3$ である

のいずれかの場合であるから　$r_{n+1}=\dfrac{2}{5}q_n+\dfrac{1}{5}r_n$　……②

①－② から　$q_{n+1}-r_{n+1}=-\dfrac{1}{5}(q_n-r_n)$

これと $q_1-r_1=0$ から　$q_n=r_n$

これを ① に代入して　$q_{n+1}=\dfrac{3}{5}q_n$

よって　$q_n=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$r_n=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

$n\geqq 3$ のとき，n 回目の操作で終了するのは，

[5]　$(n-1)$ 回目の操作をし，S_{n-1} が 3 で割って 1 余る数であり，$X_n=2$，5 である

[6]　$(n-1)$ 回目の操作をし，S_{n-1} が 3 で割って 2 余る数であり，$X_n=1$，4 である　のいずれかの場合であるから　$p_n=\dfrac{2}{5}q_{n-1}+\dfrac{2}{5}r_{n-1}$

よって　$p_n=\dfrac{4}{5}q_{n-1}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-2}=\dfrac{8\cdot 3^{n-2}}{5^n}$

[2012 大阪府立大]

(1)　p_1 は $a_1=1$ となる確率である。

$a_1=1$ となるのは，1 回目に 1 以外の目が出るときであるから　$p_1=\dfrac{5}{6}$

p_2 は $a_2=2$ となる確率である。

$a_2=2$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　$a_1=0$ で，2 回目に 6 の目が出る。

すなわち，$a_2=a_1+2=0+2$ の場合。

[2]　$a_1=1$ で，2 回目に 1 と 6 以外の目が出る。

すなわち，$a_2=a_1+1=1+1$ の場合。

よって　$p_2=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$

p_3 は $a_3=3$ となる確率である。

$a_3=3$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　$a_2=0$ で，3 回目に 6 の目が出る。

すなわち，$a_3=a_2+3=0+3$ の場合。

[2]　$a_2=2$ で，3 回目に 1 と 6 以外の目が出る。

すなわち，$a_3=a_2+1=2+1$ の場合。

よって　　$p_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{6}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

(2)　p_k $(2\leqq k\leqq n)$ は $a_k=k$ となる確率であり，$a_k=k$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　$a_{k-1}=0$ で，k 回目に 6 の目が出る。

[2]　$a_{k-1}=k-1$ で，k 回目に 1 と 6 以外の目が出る。

よって　　$p_k=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+p_{k-1}\cdot\frac{4}{6}$

ゆえに　　$p_k=\frac{2}{3}p_{k-1}+\frac{1}{36}$　$(2\leqq k\leqq n)$

(3)　(2) の漸化式を変形すると　　$p_k-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}\left(p_{k-1}-\frac{1}{12}\right)$

よって，数列 $\left\{p_k-\frac{1}{12}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{12}=\frac{5}{6}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから　　$p_k-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

ゆえに　　$p_k=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{12}$　$(1\leqq k\leqq n)$

[2012 東京理科大]

(1)　規則 1 と 2(イ) より，コインを 1 回投げたとき，表が出ても裏が出ても，A，B どちらかが 1 点多くなるから　　$P_1=0$

これと規則 2(ロ) より，コインを 2 回投げたとき持ち点が同じになるには，2 回目に表が出ればよいから　　$P_2=\frac{1}{2}$

(2)　規則から，2 人の持ち点は同じであるか，1 点差であるかのいずれかである。

コインを n 回投げた結果，持ち点が同じであれば，規則 2(イ) より，$(n+1)$ 回目に投げた後に持ち点が同じになることはない。

持ち点が 1 点差であれば，規則 2(ロ) より，$(n+1)$ 回目に表が出れば，持ち点が同じになる。

したがって　　$P_{n+1}=P_n\times 0+(1-P_n)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$　……①

入試演習　(確率漸化式①)　　解答編

(3)　① を変形すると　　$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　　　ゆえに　　$P_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$