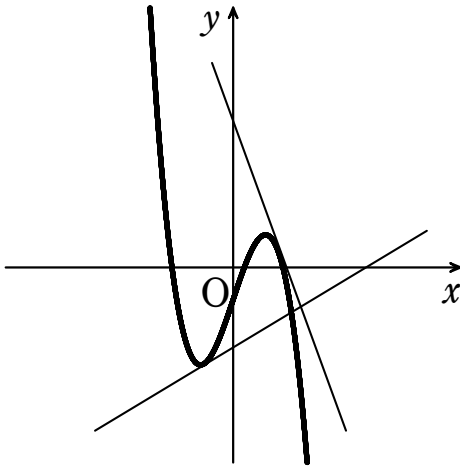


(接線の傾きと増減)



左のグラフをよく観察してみてください。ある点における接線の傾きと、その接点付近のグラフの増減に着目すると、どんなことが分かるでしょうか。

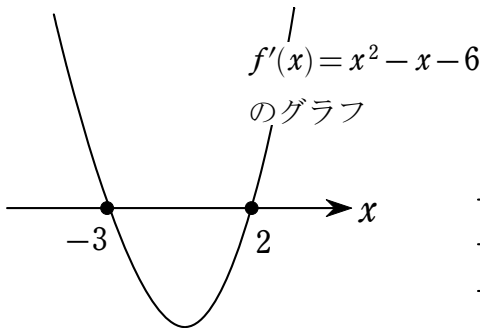
接線の傾きが正のところではグラフは増加し、負のところではグラフは減少しています。ところで $y=f(x)$ のグラフ上の任意の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きは $f'(x)$ だから、 $f'(x) > 0$ のところではグラフが増加し、 $f'(x) < 0$ のところではグラフは減少するといえます。

更に、グラフが増加から減少に転ずるところにおける y の値のことを極大値、減少から増加に転ずるところにおける y の値のことを極小値と言い、両方併せて極値と言います。(注極値を取るところでは、 $f'(x)$ の値は0となっていることに注意。)

例題 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ において、 $f'(x)$ の符号を調べることにより、 $f(x)$ の増減を求め、更に増減表を描いて極値を求めなさい。

解答 与式より $f'(x) = x^2 - x - 6$ となり、 $f'(x) = 0$ において解くと $(x+2)(x-3) = 0$ より $x = -3, 2$ となる。

左のグラフより $x < -3$ と $2 < x$ の範囲では $f'(x) > 0$ だから $f(x)$ のグラフは増加し、 $-3 < x < 2$ の範囲では $f'(x) < 0$ だから、 $f(x)$ のグラフは減少すると分かる。したがって増減表は以下のようになる。



x	...	-3	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{11}{2}$	↘	$-\frac{31}{3}$	↗

増減表より $x = -3$ のとき極大値 $\frac{11}{2}$ をとり、 $x = 2$ のとき極小値 $-\frac{31}{3}$ をとる

問題 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ が $x = -4$ で極大値84をとるように、定数 a, b の値を定めよ。また、極小値を求めよ。

解答 与式より、 $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ 。与式は $x = -4$ で極大値84をとるので $\begin{cases} f'(-4) = 0 \\ f(-4) = 84 \end{cases}$ つまり

$\begin{cases} 48 - 24 + a = 0 \cdots ① \\ -64 + 48 - 4a + b = 84 \cdots ② \end{cases}$ となる。①を解いて、 $a = -24$ 。これを②に代入し

$$-64 + 48 + 96 + b = 84 \quad \therefore b = 4 \quad \text{すなわち } (a, b) = (-24, 4)$$

逆に $(a, b) = (-24, 4)$ のとき、与式は $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 4$ となり、 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$ となる。 $f'(x) = 0$

とおいて解くと、 $x^2 + 2x - 8 = 0$ $(x+4)(x-2) = 0$ $\therefore x = -4, 2$

このとき増減表は以下ようになる。

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	84	$\searrow$	-24	$\nearrow$

増減表より、確かに与式は $x = -4$ のとき極大値 84 をとり、更に $x = 2$ のとき極小値 -24 をとる。

以上より、 $(a, b) = (-24, 4)$ 極小値は -24 ($x = 2$) となる。

注意 この問題で $\begin{cases} f'(-4) = 0 \\ f(-4) = 84 \end{cases}$ だけでは、 $x = -4$ のとき、極大値 84 をとるのか、それとも極小値 84 をとるのか、あるいはそもそも 84 が極値なのかどうかは確定できない。このような問題では、必ず増減表をかいて増減を確かめることが不可欠である。