$a_{n+1}-f(n+1)=p\{a_n-f(n)\}$ 型の漸化式

【問題】 $a_1=5$, $a_{n+1}=3a_n-4n+4$ のとき、 a_n を n の式で表しなさい。

（着眼点）大半の漸化式は、等比数列の形に持っていくのが普通ですが、これも例外ではなく $a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$ の形にして、 初項 $a_1-f(1)$, 公比3 の等比数列の形に持ち込みます。（※但し、 $f(n)$ は n の一次式です。）

まず、 $f(n)=\alpha n+\beta$ （α , β は定数）とおいて、 $a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$ に代入します。すると $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ となります。この（ ）の部分を展開し、 $a_{n+1}=$ の形に変形します。すると $a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+(\alpha-2\beta)$ となり、これを $a_{n+1}=3a_n-4n+4$ と比較すると

$\begin{cases}-2\alpha=-4\\ \alpha-2\beta=4\end{cases}$ となります。これを解くと、$(\alpha,\beta)=(2,-1)$ となります。これを

$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ に代入すると、 $a_{n+1}-\{2(n+1)-1\}=3\{a_n-(2n-1)\}$ となります。

ここまでの内容は、特性方程式の場合と同様、答案には書きません。実際の答案は、次のようになります。

【解答】 $a_{n+1}=3a_n-4n+4$ より $a_{n+1}-\{2(n+1)-1\}=3\{a_n-(2n-1)\}$

ここで、数列 $\{a_n-(2n-1)\}$ を考えると、これは 初項が $a_1-(2\times1-1)=5-1=4$, 公比が 3の等比数列だから、

$a_n-(2n-1)=4\cdot3^{n-1}$ つまり $a_n=4\cdot3^{n-1}+2n-1$ となる。

【類題】次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3n$

※解答はページ末に記載。

解答 $a_n=7\cdot2^{n-1}-3n-3$