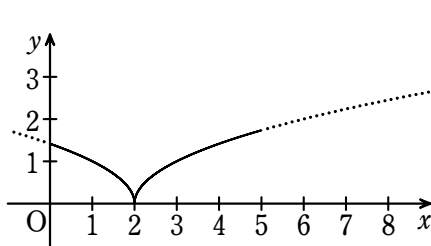


絶対値を含んだ定積分の計算問題は、絶対値を外すのが鉄則です。更に、その計算を間違いなく行うには、グラフの利用が極めて有効です。早速、具体的な問題を使って、そのやり方を研究してみましょう。

例題 $\int_0^5 \sqrt{|x-2|} dx$

解答 まず、場合分けをしてみましょう。 $0 \leq x \leq 2$ のとき $\sqrt{|x-2|} = \sqrt{2-x}$ で、 $2 \leq x \leq 5$ のとき $\sqrt{|x-2|} = \sqrt{x-2}$ となりますから、 $y = \sqrt{|x-2|}$ ($0 \leq x \leq 5$) のグラフは以下のようになります。

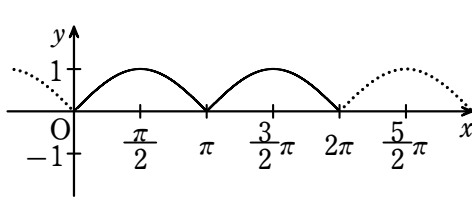


よって、与式を計算すると

$$\begin{aligned} \int_0^5 \sqrt{|x-2|} dx &= \int_0^2 \sqrt{2-x} dx + \int_2^5 \sqrt{x-2} dx \\ &= \int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{2}} dx + \int_2^5 (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 \\ &= \left\{ 0 - \left(-\frac{2}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} \right) \right\} + \left(\frac{2}{3} \times 3^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} + \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

問題 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

解答 これは場合分けをせずすぐにグラフが描けるから、まず先にグラフを描くことにします。



グラフの対称性を利用すると

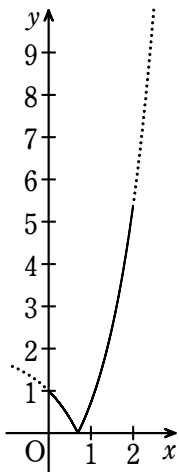
$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 4 \times \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\{0 - (-1)\} = 4$$

問題 $\int_0^2 |e^x - 2| dx$

解答 $e^x - 2 = 0$ となる x の値を求めると、 $e^x = 2$ より $x = \log 2$ となるので、 $0 \leq x \leq \log 2$ のとき

$|e^x - 2| = 2 - e^x$ 、 $\log 2 \leq x \leq 2$ のとき $|e^x - 2| = e^x - 2$ となり、そのグラフは左図のようになります。

このとき



$$\begin{aligned} \int_0^2 |e^x - 2| dx &= \int_0^{\log 2} (2 - e^x) dx + \int_{\log 2}^2 (e^x - 2) dx \\ &= \left[2x - e^x \right]_0^{\log 2} + \left[e^x - 2x \right]_{\log 2}^2 = \{2\log 2 - 2 - (0 - 1)\} + \{e^2 - 4 - (2 - 2\log 2)\} \\ &= 4\log 2 + e^2 - 7 \end{aligned}$$