2次曲線の基本（楕円 ①）

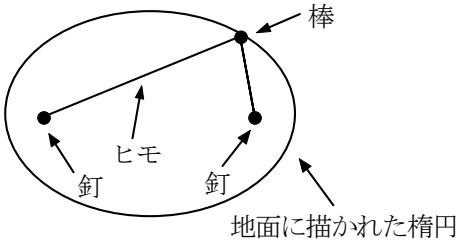
by Aokijuku

楕円の（式の）一般形は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ですが、皆さんは、ある楕円の式が与えられたとき、そのグラフを描いたり、焦点の座標や2焦点から楕円上の点までの距離の和、長軸、短軸の長さ等をすぐに答えることが出来ますか。もし、それが出来なっかったら、基本的な問題さえ解けないことになりかねません。これから行う説明をしっかり理解し、是非、楕円の問題に自信を持って解けるようにして下さい。

では、まず、そもそも楕円とはどういうものか、そこから話を進めましょう。

[楕円を描くのは簡単]

地面の上に楕円を描くのは、とても簡単です。2本の釘と1本のヒモ、金づち、そしてほど良い長さと太さの棒きれさえあれば、すぐに楕円を描くことが出来ます。まず、適当な間隔で2本の釘を地面に打ち、それぞれの釘に用意したヒモの両端を結びつけ、棒にヒモを引っかけてピンと張った状態で地面に線を描けば、それで楕円を描くことが出来ます。



つまり楕円とは、2点からの距離の和が一定である点の軌跡だと言えます。このことを利用して楕円の式を導いてみましょう。

今、座標平面上に2点 $F(c\,,0)$, $F'(-c\,,0)$（$c>0$） を取り、その2点からの距離の和が $2a$ （$a>0$）である点を $P(x\,,y)$ とします。

このとき、 $F'P+FP=2a$ より

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$

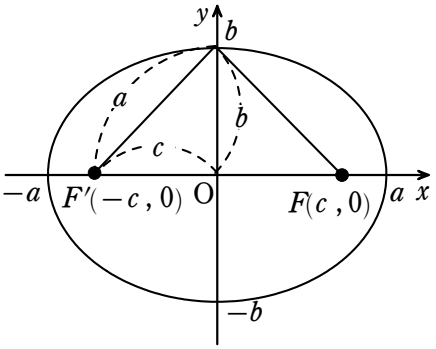
$\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \quad \Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$

$\Leftrightarrow \quad a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$

$\Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a^2-c^2>0$ だから、 $a^2-c^2=b^2$ （$b>0$）とすると　　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

両辺を a^2b^2 で割って　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　逆に、この曲線上の任意の点 $P(x,\,y)$ は、与えられた条件を満たす。



左の図で、3点 $F'(-c\,,0)$ 、原点、点 $(0\,,b)$ を結ぶ直角三角形で、 $a^2=b^2+c^2$ の関係が成り立っていることに注意。また、焦点の座標を $a\,,b$ で表すと　$c^2=a^2-b^2$ だから

$(-\sqrt{a^2-b^2}\,,0)$, $(\sqrt{a^2-b^2}\,,0)$ となることに着目。

また、長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$ である。