微積分チェックシート②　　by Aokijuku

① $f(x)=a^x$ において、 $f'(x)=a^x\log a$ となるのは、どうしてですか。

② $y=\sin^4 x$ を例にして、合成微分の考え方を説明しなさい。

③次の各関数を x で微分しなさい。

1) $y=\cos x$

2) $y=\tan x$

3) $y=\dfrac{1}{\tan x}$

4) $x^2+y^2=16$

5) $y=(x+1)^2(2x-1)^3$　※但し、5) は対数微分法を使って微分しなさい。

① $f(x)=y=a^x$ とおくと、 $x=\log_a y$　つまり

$x=\dfrac{\log y}{\log a}$ となり　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\log a}\times\dfrac{1}{y}$

すなわち　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y\log a}$ より

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=y\log a=a^x\log a$ となります。

※逆関数の微分の理解がポイントです。

② $\sin x=t$ とおくと　$y=t^4$ より　$\dfrac{dy}{dt}=4t^3$ となり、

一方、 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ ですから

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=4t^3\cdot\cos x=4\sin^3 x\cos x$ となります。

　要は $y=\sin^4 x$ において、 $\sin x$ を x のように見なし $4\sin^3 x$ とし、それに x と見なした $\sin x$ を x で微分したものである $\cos x$ をかければ良いのです。

③

1) $y'=-\sin x$

2) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

4) 与式の両辺を x で微分し　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

※ポイントは y^2 を x で微分するとき、まず y^2 の y を x と見なし $2y$ としてから、 x と見なした y を x で微分した $\dfrac{dy}{dx}$ と掛けることです。

5) まず、真数条件をクリアするために両辺の絶対値をとります。

$|y|=|x+1|^2|2x-1|^3$　次に両辺の自然対数をとって

$\log|y|=2\log|x+1|+3\log|2x-1|$　更に両辺を x で微分し　$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x+1}\cdot(x+1)'+\dfrac{3}{2x-1}\cdot(2x-1)'$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2}{x+1}+\frac{6}{2x-1}\right)$$

$$=(x+1)^2(2x-1)^3\frac{4x-2+6x+6}{(x+1)(2x-1)}$$

$$=(x+1)(2x-1)^2(10x+4)=2(x+1)(2x-1)(5x+2)$$

※ポイントは $\log|y|$ を x で微分するところです。まず、 y を x と見なして微分し $\dfrac{1}{y}$ とします。それに x と見なした y を x で微分した $\dfrac{dy}{dx}$ を掛けて $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となります。