

問題 a, b を異なる正の実数とする。不等式 $\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < e$ を示せ。

解答 $a > 0, b > 0$ であるから $\frac{1+a}{1+b} > 0$

よって、与式の両辺の自然対数をとると $\log\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < \log e$

すなわち $\frac{\log(1+a) - \log(1+b)}{a-b} < 1$

これを示せばよい。

$f(x) = \log(1+x)$ とおくと、 $f(x)$ は $x > -1$ において微分可能で $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

ゆえに、平均値の定理により、 $\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = f'(c)$ すなわち

$\frac{\log(1+a) - \log(1+b)}{a-b} = \frac{1}{1+c}$ を満たす実数 c が a と b の間に存在する。

$c > 0$ であるから $\frac{1}{1+c} < 1$

したがって、 $\frac{\log(1+a) - \log(1+b)}{a-b} < 1$ が成り立つから $\left(\frac{1+a}{1+b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < e$