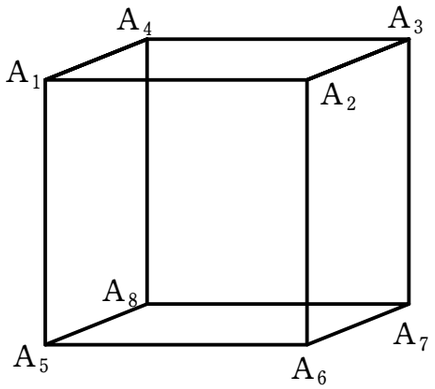
早稲田大学過去問④

1

立方体の 8 個の頂点を図のように A_1，A_2，……，A_8 とする。この 8 点から無作為に 4 点を選び，それらを頂点とする四面体あるいは四角形を X とする。また，残りの 4 点から同様にしてできる図形を Y とし，X と Y の共通部分 (交わってできる図形) を Z とする。次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2) は答のみでよい。



(1)　X が A_1，A_3，A_6，A_8 を頂点とする四面体で，Y が A_2，A_4，A_5，A_7 を頂点とする四面体のとき，Z はどんな図形か。

(2)　X が A_1，A_2，A_3，A_7 を頂点とする四面体で，Y が A_4，A_5，A_6，A_8 を頂点とする四面体のとき，Z はどんな図形か。

(3)　X と Y が共通部分をもたない確率を p とし，X と Y の共通部分 Z が 1 点になる確率を q_0，線分になる確率を q_1，平面図形になる確率を q_2，立体図形になる確率を q_3 とする。p，q_0，q_1，q_2，q_3 を求めよ。

2

点 P は，数直線上の点 1 から出発し，さいころの出る目が 1，2，3，4 ならば +1 だけ，5，6 ならば −1 だけ動く。この試行を繰り返し，点 P が点 0 または点 5 に到達したときに試行は終了するものとする。点 P が点 5 に到達して終了する確率を求めよ。

3

a と p を正の実数とする。座標平面上に原点 O (0，0) を通る放物線 $y=ax^2$ と点 P (0，p) がある。点 A がこの放物線上を動くとき，線分 AP の長さは A = O において最小値をとるとする。p を固定したとき，この条件を満たすような a の最大値を p を用いて表せ。

4

実数 x，y が，不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 $(xy,\ x+y)$ の存在する範囲の面積は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である。

5

AC および BD を対角線にもつ四角形 ABCD があり，点 O を中心とする円が四角形 ABCD に外接しているとする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表す。

(1)　ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$ の大きさが等しいならば，辺 AB と辺 CD は平行であるかまたは点 O は辺 AB 上にあることを証明せよ。

(2)　三角形 ABC，BCD，CDA，DAB の重心がすべて点 O から等しい距離にあるならば，四角形 ABCD は長方形であることを証明せよ。

6

等差数列 $\{a_n\}$ の初項が 99 で，第 12 項から第 23 項までの和が 0 である。このとき，初項から第 $\square$ 項までの和が最大となる。

7

複素数 z は $z^7=1$ かつ $z \neq 1$ を満たす。z の偏角を θ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ は $\square$ である。

(2)　$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta$ は $\dfrac{\square^{イ}}{\square_{ウ}}$ である。

8

すべての正の実数 x に対して $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<3$ であり，また $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ であることが知られている。以下では n は自然数とし，i は虚数単位を表すとする。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|1+\dfrac{i}{n}\right|^n$ を求めよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$ の実部を a_n，虚部を b_n とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

9

a を正の実数とする。座標平面において不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ と不等式 $y\geqq\dfrac{e^{ax}}{a}$ の表す領域の共通部分の面積を $S(a)$ とするとき，$\lim\limits_{a\to\infty}S(a)$ を求めよ。

10

(1)　関数 $f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$ を微分せよ。

(2)　関数 $g(x)=e^{-\pi x}\sin\pi x$ を考える。

(ア)　$g(x)$ の極値をすべて求めよ。

(イ)　$n-1\leqq x\leqq n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ における $y=g(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

(ウ)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ を求めよ。