二次試験過去問（極限・その他）

1

$f(x)=x^3+2x-2$ とする。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲にただ 1 つの解をもち，その解が無理数であることを示せ。

(2)　α を 3 次方程式 $f(x)=0$ の $0<x<1$ の範囲にある無理数の解とする。次のように，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を定める。$a_1=0$，$b_1=1$ とし，a_n と b_n を用いて，a_{n+1} と b_{n+1} を

(A)　$f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)>0$ のとき，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=b_n$，

(B)　$f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<0$ のとき，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，

(C)　$f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ のとき，$a_{n+1}=b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

により定める。このとき，すべての自然数 n について，次の (ア)，(イ)，(ウ) が成り立つことを示せ。

（ア）　a_n と b_n は有理数である。

（イ）　$a_n<\alpha<b_n$ である。

（ウ）　$b_n-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

(3)　(2) のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ を示せ。

2

関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ と $a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　a_3 の値を求めよ.

(2)　$x_1<x_2<2$ のとき，$f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ.

(3)　$n=3,4,\cdots\cdots$ に対し，$a_n<1+\dfrac{2}{n}$ が成り立つことを示せ.

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

3

袋の中に 0 から n までの番号を 1 つずつ書いた $n+1$ 枚のカードがある。ただし，n は自然数とし，カードに書かれた番号はすべて異なるものとする。この袋より，カードを 1 枚取り出しもとに戻す操作を 2 回行う。最初に取り出したカードに書かれていた番号を a，次に取り出したカードに書かれていた番号を b と表す。2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ が実数解をもつ確率を P_n とする。

(1)　P_1，P_2 をそれぞれ求めよ。

(2)　n を 3 以上の自然数とする。$\sqrt{n}$ を超えない最大の整数を c_n とするとき，P_n を n と c_n を用いて表せ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n$ を求めよ。

4

a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2)　$-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

5

(1)　n を 3 以上の整数，x を正の実数とする。このとき

(a)　不等式 $(1+x)^n>1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ を証明せよ。

(b) 極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{(1+x)^n}$ の収束，発散を調べ，収束するときにはその値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$3a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2^{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義する。

(a) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

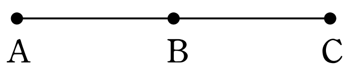
(b) 上で求めた a_n に対して，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ の収束，発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ。

$\boxed{6}$

座標平面上の 3 点 O $(0,\ 0)$，A $(2,\ 0)$，B $(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。線分 AB 上の点 P_2，P_3，$\cdots\cdots$ を次のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。$n\longrightarrow\infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

$\boxed{7}$

図のように 3 つの頂点 A，B，C が線分でつながっている。



この図形の上を点 P が次の規則に従って動く。以下，n は 0 以上の整数である。

● 時刻 0 に点 P は頂点 A にいる。

● 時刻 n に点 P が頂点 A にいる場合，時刻 $n+1$ において，確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 A にとどまっているか，確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。

● 時刻 n に点 P が頂点 B にいる場合，時刻 $n+1$ において，確率 $\dfrac{1}{3}$ で頂点 B にとどまっているか，確率 $\dfrac{1}{3}$ で頂点 A に移動しているか，確率 $\dfrac{1}{3}$ で頂点 C に移動している。

● 時刻 n に点 P が頂点 C にいる場合，時刻 $n+1$ において，確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 C にとどまっているか，確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。

時刻 n に点 P が頂点 A，B，C にいる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

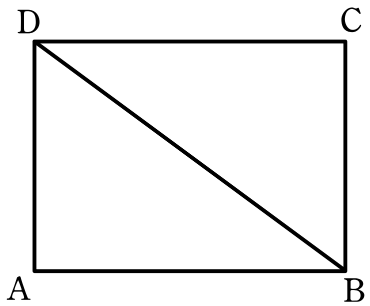
(2) (1) の結果と $a_n+b_n+c_n=1$ を利用して，b_n を n の式で表せ。

(3) $p_n=2^n a_n$ とおく。p_n を n の式で表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}b_n$，$\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ。

$\boxed{8}$

右図のように，4 つの異なる点 A，B，C，D と，それらを結ぶ 5 つの線分 AB，BC，CD，DA，BD を考える。



点 P は次の 2 つの規則 (i)，(ii) にしたがって，点 A，B，C，D を移動してゆく。以下において，n は自然数とする。

(i) 時刻 0 において，点 P は点 A にいる。

(ii) 点 P は，時刻が n になると，時刻 $(n-1)$ のときにいた点から 1 本の線分で結ばれる点のいずれかに移動する。そのとき，それぞれの点に移動する確率はすべて等しい。

たとえば，時刻 $(n-1)$ に点 P が点 A にいれば，時刻 n には点 B または点 D にいる。そのとき，点 B に移動する確率，点 D に移動する確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。また，時刻 $(n-1)$ に点 P が点 D にいれば，時刻 n には点 A，B，C のいずれかにいる。そのとき，点 A に移動する確率，点 B に移動する確率，点 C に移動する確率はともに $\dfrac{1}{3}$ である。

時刻 n に点 P が点 A，B，C，D にいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする。

(1) b_1 と b_2 をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} と c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n，d_n を用いてそれぞれ表せ。

(3) $b_n=d_n$ と $a_n=c_n$ が成り立つことをそれぞれ示せ。

(4) b_{n+2} を b_{n+1} と b_n を用いて表せ。

(5) $e_n=b_{n+1}-b_n$ とおく。数列 $\{e_n\}$ の一般項を求めよ。

(6)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty} b_n$ と $\lim_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{9}$

O を原点とする xy 平面上に，点 $A_n\left(\cos\frac{\pi}{2^n},\ \sin\frac{\pi}{2^n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がある。また，次の (i) から (iii) を満たす点 P_1，P_2，P_3，…… および点 Q_1，Q_2，Q_3，…… がある。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，P_n，Q_n は半直線 OA_n 上にある。

(ii)　P_1 の座標は $(0,\ 1)$ である。

(iii)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$P_nP_{n+1}\perp OA_{n+1}$，$P_{n+1}Q_n\perp OA_n$ である。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$\dfrac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}$ を求めよ。

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty} OP_n$ を求めよ。

$\boxed{10}$

a，b，c を正の定数とする。xy 平面上に 3 点 $P_1(0,\ 0)$，$Q_1(a,\ 0)$，$R_1(b,\ c)$ がある。線分 Q_1R_1 の中点を P_2，R_1P_1 の中点を Q_2，P_1Q_1 の中点を R_2 とする。同様に，2 以上の自然数 n に対して，線分 Q_nR_n の中点を P_{n+1}，R_nP_n の中点を Q_{n+1}，P_nQ_n の中点を R_{n+1} とする。

(1)　点 P_3，Q_3，R_3 の座標を a，b，c を用いてそれぞれ表せ。

(2)　$\overrightarrow{P_3P_5}$ を $\overrightarrow{P_1P_3}$ を用いて表せ。

(3)　点 P_{2n+1} の座標 $(X_{2n+1},\ Y_{2n+1})$ を a，b，c，n を用いて表せ。

(4)　(3) で求めた X_{2n+1}，Y_{2n+1} に対して，$X=\lim_{n\to\infty} X_{2n+1}$，$Y=\lim_{n\to\infty} Y_{2n+1}$ とする。座標 $(X,\ Y)$ を a，b，c を用いて表せ。