

数Ⅱでも扱われる三角関数の「和差 $\Leftrightarrow$ 積」の公式は、しばしば数Ⅲでも姿を現します。ここでは、加法定理の式から、いかにして「和差 $\Leftrightarrow$ 積」の公式が作れるか、また、その覚え方について学びます。

まずは、サインとコサインの加法定理の式を確認しましょう。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cdots ①$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdots ②$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cdots ③$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdots ④ \quad \text{この4つですね。}$$

では、公式の作り方を紹介します。

まず、①+②、①-②、③+④、③-④の計算をして下さい。

$$①+②より \quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta \cdots ⑤$$

$$①-②より \quad \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta \cdots ⑥$$

$$③+④より \quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta \cdots ⑦$$

$$③-④より \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin \alpha \sin \beta \cdots ⑧$$

上の⑤～⑧の式において $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ とおくと

$$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = A + B \text{ より } \alpha = \frac{A+B}{2} \quad (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = A - B \text{ より } \beta = \frac{A-B}{2} \text{ だから}$$

「和差 $\Rightarrow$ 積」の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cdots ⑨$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \cdots ⑩$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cdots ⑪$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \cdots ⑫ \quad \text{となります。}$$

次は、⑤～⑧の公式の左辺と右辺を入れ替えて、両辺を2で割って下さい。(注⑧だけは両辺を-2で割ります。)

「積 $\Rightarrow$ 和差」の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \cdots ⑬$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \cdots ⑭$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \cdots ⑮$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \cdots ⑯$$

作り方は分かったけど、これらを全て覚え、間違いなく使いこなすのは大変なことです。そこで少し工夫したいと思います。まず、⑨～⑫の式のAを α に、Bを β に改めて書き換えます。そうすると次のようになります。

加法定理と「和差 $\leftrightarrow$ 積」の公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \dots \textcircled{9},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \dots \textcircled{10},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \dots \textcircled{11},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \dots \textcircled{12},$$

ここまで単なる準備で、実はこれからが本番なのです。今から情報の圧縮という作業を行います。まずは、 $\sin$ と $\cos$ を簡単な図形に置き換えてみましょう。少しなまっています、 $\sin$ を $\sin \alpha$ 「素直」な性格を持つ三角比と考えます。実は、その素直さは $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ という式にも現れていますね。素直な人は心が丸いと言えますから、 $\sin$ を $\bigcirc$ で表すことにします。次に $\cos$ ですが、それを $\cos \alpha$ 「こすい（ずるい）」性格を持つ三角比と考えます。その「こすい」性格は $\cos(-\theta) = \cos \theta$ という式にも現れています。ところで、性格が「こすい」人は、心がとがっていると考えられますから、 $\cos$ を $\triangle$ で表すことにします。こうすると $\textcircled{9}' \sim \textcircled{12}'$ の式は、それぞれ

$$\bigcirc + \bigcirc = 2 \bigcirc \triangle \quad \bigcirc - \bigcirc = 2 \triangle \bigcirc \quad \triangle + \triangle = 2 \triangle \triangle \quad \triangle - \triangle = -2 \bigcirc \bigcirc \quad \text{となります。}$$

左辺は、 $\bigcirc$ 同士、 $\triangle$ 同士の足し算、引き算になりますが、 $\sin$ を表す $\bigcirc$ については、足し算の場合、素直な性格が反映し、右辺は $\bigcirc$ と $\triangle$ が公平に現れた積で表されます。引き算は、やはり公平には違いありませんが、 $\bigcirc$ と $\triangle$ が入れ替わって $\triangle$ が先に出てきます。 $\cos$ を表す $\triangle$ については、足し算の場合、「こすい」性格が反映して偏りが生じ、右辺は $\triangle$ だけの積になります。引き算については、同じように偏るとはいっても、もはや $\triangle$ で偏ることは出来ませんから、右辺は $\bigcirc$ だけの積になります。しかし、 $\triangle$ 同士の差が $\bigcirc$ 同士の積になるというのは、いくらか違和感がありますから、その違和感がペナルティとなって $-$ の符号が付くことになります。どうですか、 $\sin$ は $\cos$ の性格を考えて式を作ると、覚えるのはとても簡単でしょう。

ところで、 $\bigcirc$ と $\triangle$ の式の左辺と右辺を入れ替えて、両辺を2で割ると（ $\triangle - \triangle = -2 \bigcirc \bigcirc$ の式については、 -2 で割ります。）

$$\bigcirc \triangle = \frac{1}{2}(\bigcirc + \bigcirc) \quad \triangle \bigcirc = \frac{1}{2}(\bigcirc - \bigcirc) \quad \triangle \triangle = \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \quad \bigcirc \bigcirc = -\frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \quad \text{となります。}$$

おっと、大切なことを忘れていました。そうです。角度が抜けています。 $\textcircled{9}' \sim \textcircled{12}'$ の式と、 $\textcircled{13} \sim \textcircled{16}$ の式をよく見ると、左辺は α と β が、それぞれ α を先にして単独で出てきます。右辺については、必ず $\alpha + \beta$ が先に出て、その後に $\alpha - \beta$ が出てきます。また、右辺の先頭に2がかけてあったら、まるで約分でもするような感じで、角の和と差を2で割って $\frac{\alpha + \beta}{2}$ と $\frac{\alpha - \beta}{2}$ とします。右辺の先頭に $\frac{1}{2}$ がかけてある場合は、再度、2で割ることはせず、単に $\alpha + \beta$ と $\alpha - \beta$ とします。

以上をまとめると、素直な $\sin$ は $\bigcirc$ 、こすい $\cos$ は $\triangle$ で表して

「和差 $\Rightarrow$ 積」の公式は

$$\bigcirc + \bigcirc = 2 \bigcirc \triangle \quad \bigcirc - \bigcirc = 2 \triangle \bigcirc \quad \triangle + \triangle = 2 \triangle \triangle \quad \triangle - \triangle = -2 \bigcirc \bigcirc \quad \text{となり}$$

「積 $\Rightarrow$ 和差」の公式は、それらの両辺を入れ替えて書き直し

$$\bigcirc \triangle = \frac{1}{2}(\bigcirc + \bigcirc) \quad \triangle \bigcirc = \frac{1}{2}(\bigcirc - \bigcirc) \quad \triangle \triangle = \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \quad \bigcirc \bigcirc = -\frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \quad \text{とな}$$

ります。角度については、左辺は α と β 、右辺が $\alpha + \beta$ と $\alpha - \beta$ となります。但し、右辺の先頭に2がついている場合は、

加法定理と「和差 $\Leftrightarrow$ 積」の公式

角度を2で割って $\frac{\alpha+\beta}{2}$ と $\frac{\alpha-\beta}{2}$ とし、 $\frac{1}{2}$ がかけてある場合は、何もせず、ただ $\alpha+\beta$ と $\alpha-\beta$ とします。

どうでしょう。分かりましたか。あとは、利用しながら記憶を補強するようにしていけば、じきに苦勞なく使えるようになると思います。どうぞ頑張って下さいね。