（入試演習）　　極方程式

問題　xy 平面上において，極方程式 $r=\dfrac{4\cos\theta}{4-3\cos^2\theta}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C を直交座標に関する方程式で表せ。

(2)　曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(3)　曲線 C で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

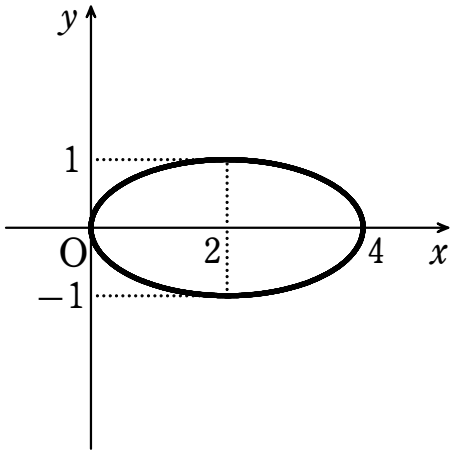
解答　(1)　$r=\dfrac{4\cos\theta}{4-3\cos^2\theta}$ より　　$r(4-3\cos^2\theta)=4\cos\theta$

両辺に r を掛けて整理すると　　$4r^2-3(r\cos\theta)^2=4r\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を代入すると　　$4(x^2+y^2)-3x^2=4x$

すなわち　　$x^2-4x+4y^2=0$　　したがって　　$\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$

(2)　(1) より，曲線 C の概形は右の図のようになる。



よって，求める体積を V_1 とすると　$V_1=\pi\displaystyle\int_0^4 y^2dx$

(1) より，$y^2=-\dfrac{(x-2)^2}{4}+1$ であるから

$$V_1=\pi\int_0^4\left\{-\frac{(x-2)^2}{4}+1\right\}dx$$

$$=\pi\left[-\frac{(x-2)^3}{12}+x\right]_0^4=\frac{8}{3}\pi$$

(3)　(1) より，$x^2-4x+4y^2=0$ であるから

$$x=2\pm2\sqrt{1-y^2}$$

$x_1=2+2\sqrt{1-y^2}$，$x_2=2-2\sqrt{1-y^2}$ とする。

このとき，求める体積を V_2 とすると

$$V_2=\pi\int_{-1}^1 {x_1}^2dy-\pi\int_{-1}^1 {x_2}^2dy$$

$$=\pi\int_{-1}^1\left(8-4y^2+8\sqrt{1-y^2}\right)dy-\pi\int_{-1}^1\left(8-4y^2-8\sqrt{1-y^2}\right)dy$$

$$=16\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

ここで，$\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ は半径 1 の半円の面積を表すから　　$\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}$

したがって　　$V_2=16\pi\cdot\dfrac{\pi}{2}=8\pi^2$