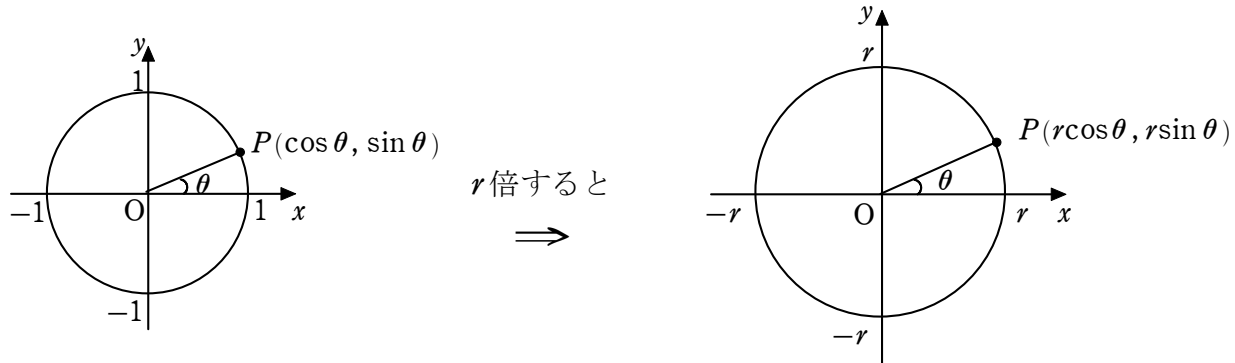


加法定理を利用した点の回転移動

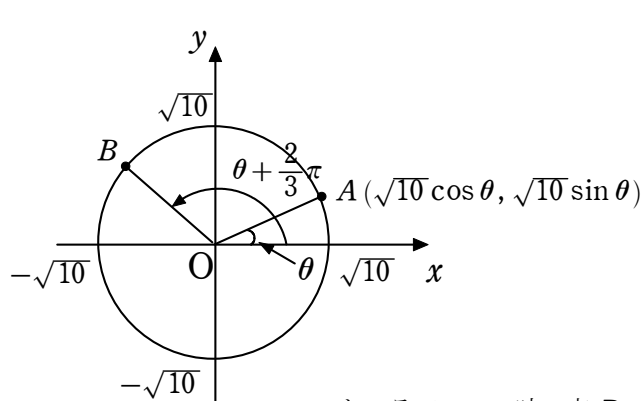
by Aokijuku

私たちは、単位円周にある下図の点Pの座標が $P(\cos \theta, \sin \theta)$ であることを知っています。この図で角度の大きさを変えず、半径を r 倍すれば、点Pの座標が $P(r\cos \theta, r\sin \theta)$ となることは、容易に分かると思います。



このことと加法定理を利用すると、私たちは座標平面上のどんな点でも、原点の周りに好きな角度だけ回転させた点の座標を求めることが出来ます。

例として、点 $A(3, 1)$ を原点の周りに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点 B の座標を求めて見ましょう。点 A と原点との距離は $\sqrt{10}$ ですから、下図のように半径OAと x 軸の正方向とのなす角を θ とすると、点 $A(3, 1)$ は図のように



$A(\sqrt{10} \cos \theta, \sqrt{10} \sin \theta)$ と表せることになります。

$$\text{つまり } \begin{cases} 3 = \sqrt{10} \cos \theta \\ 1 = \sqrt{10} \sin \theta \end{cases} \text{ の関係が成り立ち}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{ となります。}$$

ところで、この時、点 B の座標は $(\sqrt{10} \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi), \sqrt{10} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi))$ と表せます

から、加法定理を利用すると

$$\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos \theta \cos \frac{2}{3}\pi - \sin \theta \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{となり}$$

$$\sqrt{10} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{となります。}$$

$$\text{また、} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin \theta \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \theta \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{となり}$$

$$\sqrt{10} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{となります。}$$

よって、点 B の座標は、 $B\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ となることが分かります。