

(入試演習)

ベクトルと体積

【問題】 四面体 ABCD は

- (i) $BA = \sqrt{66}$, $BC = 7$, $BD = \sqrt{65}$
(ii) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 28$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 35$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = 40$ を満たす。頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする。
(1) 辺 AC の長さを求めよ。
(2) $\overrightarrow{BH}$ を $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ を用いて表せ。
(3) 線分 CH の長さを求めよ。
(4) 面 ABC を直線 AH の周りに 1 回転させるとき、面 ABC が通過する部分の体積 V を求めよ。

【解答】 (1) $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BA}|^2 = 49 - 2 \times 28 + 66 = 59$

$$|\overrightarrow{AC}| \geq 0 \text{ であるから } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{59}$$

(2) $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$ とおくと $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$

AH ⊥ 平面 BCD であるから AH ⊥ BC, AH ⊥ BD

AH ⊥ BC から $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

すなわち $(-\overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

よって $-28 + 49\alpha + 35\beta = 0$ ゆえに $7\alpha + 5\beta = 4$ ①

AH ⊥ BD から $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

すなわち $(-\overrightarrow{BA} + \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

よって $-40 + 35\alpha + 65\beta = 0$ ゆえに $7\alpha + 13\beta = 8$ ②

①, ② を解いて $\alpha = \frac{3}{14}$, $\beta = \frac{1}{2}$

ゆえに $\overrightarrow{BH} = \frac{3}{14} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$

(3) $|\overrightarrow{CH}|^2 = |\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BC}|^2 = \left| -\frac{11}{14} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \right|^2 = \frac{1}{14^2} | -11\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BD} |^2$

$$= \frac{1}{14^2} (11^2 \times 49 - 2 \times 11 \times 7 \times 35 + 49 \times 65) = 19$$

$$|\overrightarrow{CH}| \geq 0 \text{ であるから } |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{19}$$

(4) $|\overrightarrow{BH}|^2 = \frac{1}{14^2} |3\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{14^2} (9 \times 49 + 2 \times 3 \times 7 \times 35 + 49 \times 65) = 26$

$$|\overrightarrow{BH}| \geq 0 \text{ であるから } |\overrightarrow{BH}| = \sqrt{26}$$

点 H から辺 BC に垂線 HK を引き、 $\overrightarrow{BK} = k \overrightarrow{BC}$ とおくと

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BH} = \left(k - \frac{3}{14} \right) \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$$

HK ⊥ BC であるから $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

すなわち $\left\{ \left(k - \frac{3}{14} \right) \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \right\} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

よって $49 \left(k - \frac{3}{14} \right) - \frac{1}{2} \times 35 = 0$

これを解くと $k = \frac{4}{7}$

ゆえに、 $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ から $|\overrightarrow{BK}| = \frac{4}{7} \times 7 = 4$

したがって、三平方の定理から

$$HK = \sqrt{BH^2 - BK^2} = \sqrt{26 - 16} = \sqrt{10}$$

$BH > CH$ であるから、線分 BC を直線 AH の周りに 1 回転させたときに線分 BC が通過する領域は右の図のようになる。

よって、求める体積 V は、底面の半径が HB 、高さが AH の円錐の体積から、底面の半径が HK 、高さが AH の円錐の体積を引いたものである。

三平方の定理により、 $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{66 - 26} = 2\sqrt{10}$ であるから

$$V = \frac{1}{3} \times \pi (\sqrt{26})^2 \times 2\sqrt{10} - \frac{1}{3} \times \pi (\sqrt{10})^2 \times 2\sqrt{10} = \frac{32\sqrt{10}}{3} \pi$$

