

(入試演習)

命題と条件

問題 2つの条件 $p: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$, $q: |x| + |y| \leq r$ を考える。ただし, $r > 0$ とする。 q が p の必要条件であるような定数 r の値の範囲は $\boxed{}$ である。また, q が p の十分条件であるような定数 r の値の範囲は $\boxed{}$ である。

解答 不等式 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ で表される領域を P とすると, P は [図 1] の斜線部分。ただし, 境界線を含む。不等式 $|x| + |y| \leq r$ …… ① で表される領域 Q について考える。

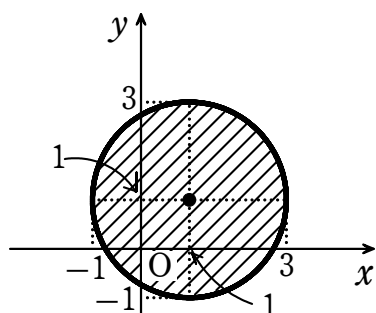
[1] $x \geq 0, y \geq 0$ のとき ① は $x + y \leq r$ すなわち $y \leq -x + r$

[2] $x < 0, y \geq 0$ のとき ① は $-x + y \leq r$ すなわち $y \leq x + r$

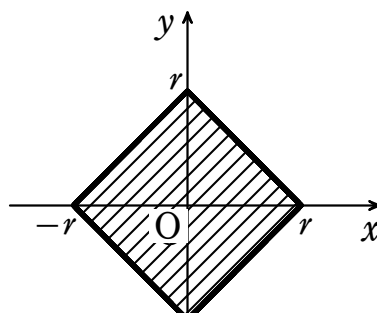
[3] $x < 0, y < 0$ のとき ① は $-x - y \leq r$ すなわち $y \geq -x - r$

[4] $x \geq 0, y < 0$ のとき ① は $x - y \leq r$ すなわち $y \geq x - r$

[1] ~ [4] から, 領域 Q は [図 2] の斜線部分。ただし, 境界線を含む。



[図 1]



[図 2]

(ア) q が p の必要条件となるのは, 領域 P が領域 Q に含まれるときである。

直線 $y = -x + r$ が円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ に接する場合, 点 $(1, 1)$ と直線 $x + y - r = 0$ の距離は 2 である。

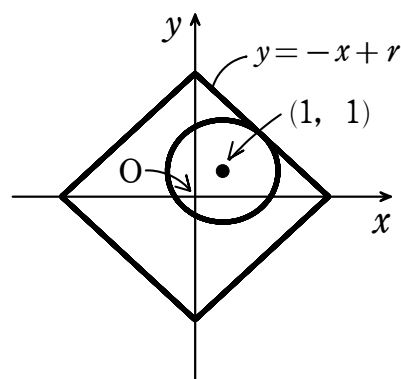
$$\text{このとき} \quad \frac{|1+1-r|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2$$

$$\text{よって} \quad |2-r| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad r = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって, 求める } r \text{ の値の範囲は} \quad r \geq 2 + 2\sqrt{2}$$



(イ) q が p の十分条件となるのは、領域 Q が領域 P に含まれるときである。

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ に $y=0$ を代入すると

$$(x-1)^2+1=4$$

ゆえに $x=1\pm\sqrt{3}$

円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と x 軸の交点の座標は

$$(1-\sqrt{3}, 0), (1+\sqrt{3}, 0)$$

よって、領域 Q が領域 P に含まれるとき

$$1-\sqrt{3}\leq -r$$

ゆえに $r\leq\sqrt{3}-1$

よって、求める r の値の範囲は $0<r\leq\sqrt{3}-1$

