（入試演習）　　　　　定積分で表された関数

問題　実数 x についての関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-2\int_0^1 f_n(t)\,dt$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ を求めよ。

解答　$\int_0^1 f_n(t)\,dt=c_n$ ……① とおくと　$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-2c_n$　　よって，① から

$$
\begin{aligned}
c_n&=\int_0^1 f_n(t)\,dt=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}-2c_n\right)dt\\
&=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}dt-\int_0^1 2c_n\,dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\int_0^1 t^k dt-\Big[2c_n t\Big]_0^1\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_0^1-2c_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}\right)-2c_n\\
&=\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}-2c_n\\
&=1-\frac{1}{n+1}-2c_n
\end{aligned}
$$

ゆえに　$c_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$　　よって　$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

これより　$f_n(0)=-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$　　したがって　$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=-\frac{2}{3}$