

早稲田大学過去問⑤

1

自然数 n について、次のような命題を考える。

- (*) $n^2+1, 2n^2+3, 6n^2+5$ がすべて素数である
- (1) $n=5k$ (k は自然数) のとき、 n は (*) を満たさないことを示せ。
- (2) (*) を満たすような n は $n=1, 2$ のみであることを示せ。

2

整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0)=1$ かつ $f\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)=0$ を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。

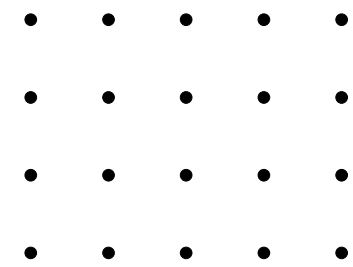
3

- (1) 四面体 ABCD と四面体 ABCP の体積をそれぞれ V, V_P とする。
- (i) $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。
- (ii) $\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}+d\overrightarrow{AD}$ が成り立つとき、体積比 $\frac{V_P}{V}$ を求めよ。
- (2) 四面体 ABCD について、点 A, B, C, D の対面の面積をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。原点を O として、 $\overrightarrow{OI}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ となる点 I を考える。四面体 ABCD の体積を V とするとき、3 点 A, B, C を通る平面と点 I の距離 r を求めよ。
- (3) (2) の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心であることを示せ。

4

平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて、次の規則で点滅を繰り返すとする。
初めはすべての電球が消えている。

ある 1 個の電球が 1 秒後に点灯し、2 秒後にその周りに隣接する 8 個の電球が点灯する。3 秒後には、さらにその外側に隣接する電球が点灯する。一般に $n+1$ 秒後には、 n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する。
1 度点灯した電球は「2 秒間点灯して次の 1 秒間消灯」を繰り返す。
次の図は電球の配置の一部分を示している。



- $n \geq 1$ とする。 n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし、 n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として、次の問いに答えよ。
- (1) a_n を n を用いた式で表せ。
- (2) b_n を n を用いた式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

5

定数 c は $-1 < c < 1$ を満たすとする。すべての実数 x に対して、関係式

$$f(x) + f(cx) = x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

6

n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点 ($k=0, 1, 2, \dots, n$) が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は、ある $t > 0$ によって決まっており、これを $p_k(t)$ とする。このとき、確率 $p_k(t)$ は $a \geq 0$ に対して次の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n, \quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

- (1) $\sum_{k=0}^n p_k(t)$ の値を求めよ。
- (2) a を t を用いて表せ。
- (3) 各 k に対して、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし、 $p_k(0) = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), $p_n(0) = 1$ と定める。
- (4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき、(3) で求めた T_k に対して、

$$E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$$

とする。 E の値を求めよ。

7

座標平面上の動点 $P_t(x, y)$ の座標が、 t の関数

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t$$

で与えられている。また O を原点とする。実数 a, b で $0 < b - a < 2\pi$ であるものに対して、線分 OP_a と、動点 P_t が $t=a$ から $t=b$ まで動くときに描く曲線と、線分 OP_b とによって囲まれる部分の面積を $S(a, b)$ とおく。

- (1) $f(t) = S(0, t)$ とする。導関数 $\frac{d}{dt} f(t)$ を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して、 $U(n) = S\left(\frac{n-1}{2}\pi, \frac{n}{2}\pi\right)$ とおく。 $U(n)$ を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} U(n)$ の和を求めよ。

8

xyz 空間上に点 $A(0, 0, \sqrt{3})$ をとる。 xy 平面上の点 $P(a, b, 0)$ は、線分 AP の長さが 2 で、 $a \geq 0, b \geq 0$ となるように動く。このとき線分 AP がえがく図形を F とする。

- (1) 点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。
- (2) 点 $Q(x, y, z)$ を図形 F 上の点とするとき、 z を x, y を用いて表せ。

- (3) 図形 F 、座標平面 $x=0, y=0, z=0$ によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体を V とする。 V の平面 $x=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を、 t を用いて表せ。
- (4) V の体積を求めよ。

9

直線 $\ell: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に接する 4 つの円を考える。

$x \sin \theta + y \cos \theta < 1$ の領域で 2 つの円は互いに接しており、そのうち 1 つの円は直線 ℓ と x 軸に、もう一方の円は直線 ℓ と y 軸に接している。これらの円の半径はいずれも r_1

である。このとき、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ として、 r_1 を t を用いて表すと、 $r_1 = \frac{1}{\sqrt{\square}}$ と

なる。残りの 2 つの円は、 $x \sin \theta + y \cos \theta > 1$ の領域で互いに接しており、そのうち 1 つの円は直線 ℓ と x 軸に、もう一方の円は直線 ℓ と y 軸に接している。これらの円の半径はいずれも r_2 である。このとき、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ として、 r_2 を t を用いて表すと、

$r_2 = \frac{1}{\sqrt{\square}}$ となる。したがって、 $\sqrt{\square} < \frac{r_1}{r_2} \leq \sqrt{\square} - \square$ である。

10

整数 x, y が $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) 整数 a, b, u, v が $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = u + v\sqrt{2}$ を満たすとき、 u, v を a, b, x, y で表せ。更に $a^2 - 2b^2 = 1$ のときの $u^2 - 2v^2$ の値を求めよ。
- (2) $1 < x + y\sqrt{2} \leq 3 + 2\sqrt{2}$ のとき、 $x=3, y=2$ となることを示せ。
- (3) 自然数 n に対して、 $(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} < x + y\sqrt{2} \leq (3 + 2\sqrt{2})^n$ のとき、 $x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ を示せ。