

解説 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義を再確認しましょう。

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ でしたね。つまり、 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは、 $f'(a)$ が存在するというこ

ですから、 $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が成立することとなります。

練習 $f(x) = |x-3|$ は $x=3$ で微分可能でしょうか。それを調べなさい。

解答 $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$

また $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$

よって $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ となり、 $f'(3)$ は存在せず、 $f(x)$ は $x=3$ で部分可能ではない。

例題 次の関数の $x=0$ における連続性と微分可能性を調べなさい。

$x \neq 0$ のとき $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$

指針 通常 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ の各辺に x をかけて、挟み打ちの定理を使う方針で行うが、 x の正負で不等式の向きが影響を受けるので、煩雑さを避けるため絶対値を使って場合分けをやらずに済む方法を試みる。

解答 $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ この各辺に $|x|$ をかけて、 $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ だから、挟み打ちの定理より $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$

つまり $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ より $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ となる。ところで、仮定より $f(0) = 0$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ となり、 $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

また、 $x=0$ における微分可能性については

$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$

$h \rightarrow 0$ のとき $\sin \frac{1}{h}$ は振動し、 $f'(0)$ は存在しない。つまり $f'(x)$ は $x=0$ で部分可能でない。

類題 次の関数の $x=0$ における連続性と微分可能性を調べなさい。

(1) $x \neq 0$ のとき $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$

(2) $x \neq 0$ のとき $f(x) = \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$, $f(0) = 0$

微分可能性について

(1) **解答** $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ この各辺に x^2 をかけて $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{だから、挟み打ちの定理より} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{つまり} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

ところで、仮定より $f(0) = 0$ よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ となり、 $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。

また、 $x = 0$ における微分可能性については

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}$$

$$\text{ところで } 0 \leq \left| \sin \frac{1}{h} \right| \leq 1 \text{ の各辺に } |h| \text{ をかけて } 0 \leq \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \quad \text{だから、挟み打ちの定理より} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| h \sin \frac{1}{h} \right| = 0$$

つまり $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$ となり $f'(0) = 0$ となる。よって $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

(2) **解答** $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad \text{ところで、仮定より} \quad f(0) = 0$$

つまり $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ となり、 $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。

また、 $x = 0$ における微分可能性については

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{1 + 2^{\frac{1}{h}}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{h}}}$$

$$\text{ところで} \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{h}}} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{h}}} = 0 \quad \text{より、} \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{h}}} \text{ は存在しない。}$$

よって $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でない。