

ベクトル方程式の基礎

解答

(1) $s+t=2$ から $\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$$

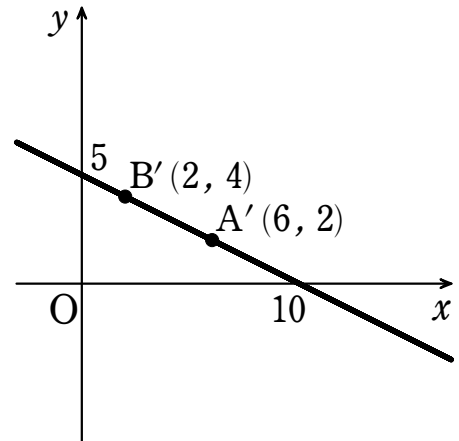
$$\frac{s}{2} = s', \quad \frac{t}{2} = t', \quad 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, \quad 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$$

とすると

$$\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}, \quad s' + t' = 1$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OP} = (1-t')\overrightarrow{OA'} + t'(\overrightarrow{OB'}) \quad \dots\dots ①$$

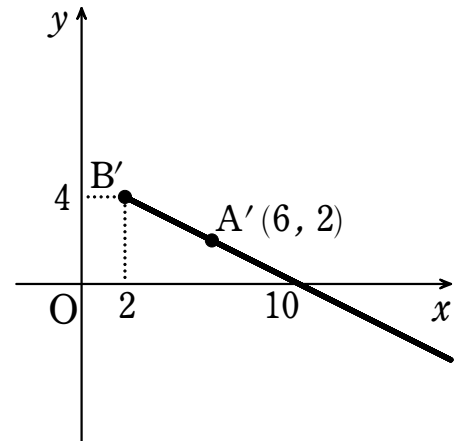
ゆえに、点Pは線分A'B'を $t' : (1-t')$ に分ける
点の集合であり、2点A'B'を通る直線である。



(2) $s \geq 0$ から $2-t \geq 0$

$$\text{よって } t \leq 2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②から、点Pは点B'を端点とし、点A'を通る半直線である。



(3) $s+t=k$ (k は定数) とおくと $0 \leq k \leq 2$

$$k=0 \text{ のとき } s=-t \text{ すなわち}$$

$$\overrightarrow{OP} = -t\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{AB}$$

よって、点Pは点Oを通り線分ABに平行な直線上を動く。この直線を ℓ とする。

$$0 < k \leq 2 \text{ のとき}$$

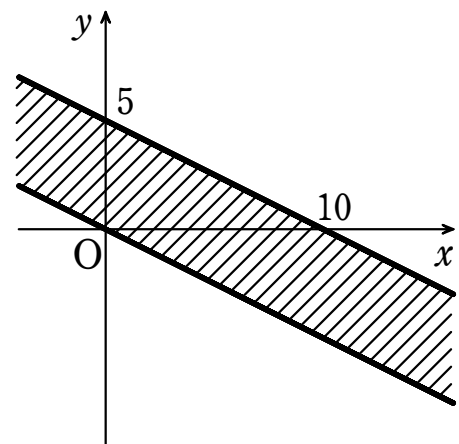
$$\overrightarrow{OP} = \frac{ks\overrightarrow{OA} + kt\overrightarrow{OB}}{k} = \frac{s(k\overrightarrow{OA}) + t(k\overrightarrow{OB})}{s+t}$$

$$k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, \quad k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} \text{ とすると、点Pは線分}$$

A'B'を $t:s$ に分ける点の集合であり、2点A', B'を通る直線である。

k を0から2に変化させると、A'B'は ℓ からABまで平行移動する。

したがって、点Pの存在範囲は図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



(4) $s \geq 0, t \geq 0$ であるから $0 \leq 3s + 2t \leq 3$ よって $0 \leq s + \frac{2}{3}t \leq 1$

また $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで, $\frac{2}{3}t = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

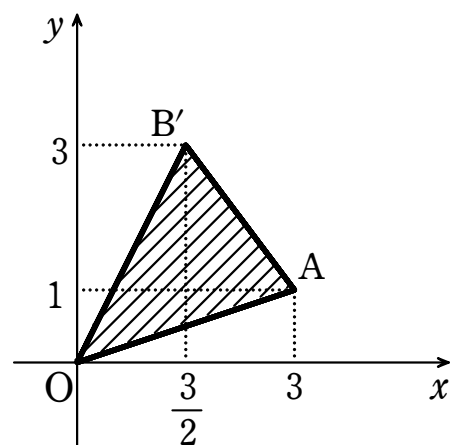
$$0 \leq s + t' \leq 1, s \geq 0, t' \geq 0,$$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ を満たす点 B' をとると, 点 P は $\triangle OAB'$

の周および内部を動く。

したがって, 点 P の存在範囲は図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。



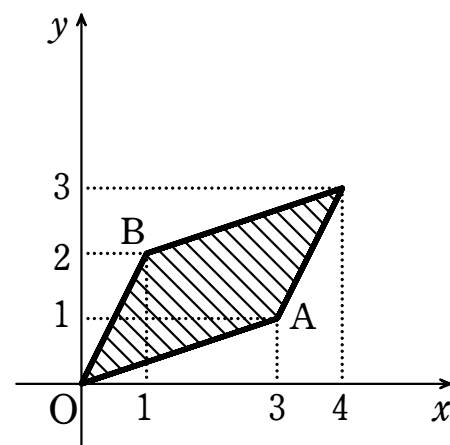
(5) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ から, $s\overrightarrow{OA}$ は線分 OA 上,

$t\overrightarrow{OB}$ は線分 OB 上を動く。

よって, 点 P は線分 OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の周および内部を動く。

したがって, 点 P の存在範囲は図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。



(6) $s = 2$ から $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (t は任意)

よって, $\overrightarrow{OP}$ は点 $(6, 2)$ を通り $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線を表す。

したがって, 点 P の存在範囲は図の直線上の点である。

