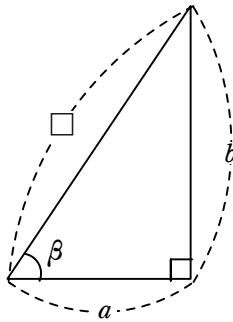


【1】次の各問に答えなさい。



①左図の□の長さを言いなさい。

②左図で $\cos \beta$ の値を a, b で表しなさい。

③左図で $\sin \beta$ の値を a, b で表しなさい。

【解答】 ① $\sqrt{a^2 + b^2}$ ② $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ③ $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

【2】上の図を利用して、次の□に適する式を入れなさい。

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \times \square + \cos \alpha \times \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos \square + \cos \alpha \sin \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\square) \end{aligned}$$

【解答】 順に、 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, β , β , $\alpha + \beta$

※これを三角関数の合成といいます。実は加法定理の応用に過ぎないんですね。合成が特別なものではないことを、理解して欲しいと思います。次にコサインの合成をしてみましょう

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \sin \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \times \square + \sin \alpha \times \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \square + \sin \alpha \sin \square) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\square) \end{aligned}$$

【解答】 順に、 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, β , β , $\alpha - \beta$

【3】次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1) $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

(2) $\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$

(3) $\sqrt{6} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta$

【解答】

(1) $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ であるから $-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(-\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \theta \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right)$$

(2) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ であるから $\frac{1}{2}\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \theta = \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3}$

$$= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

(3) $\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ であるから $\sqrt{6}\sin \theta - \sqrt{2}\cos \theta = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta - \frac{1}{2}\cos \theta \right)$

$$= 2\sqrt{2} \left\{ \sin \theta \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos \theta \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}$$

$$= 2\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

【4】 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数 $y = 7\sin^2 \theta - 8\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ を $y = a\sin 2\theta + b\cos 2\theta + c$ (a, b, c は定数) の形に変形し、更にそれを合成して、この関数の最大値と最小値を求めよ。

【解答】 $y = 7\sin^2 \theta - 8\sin \theta \cos \theta + 1 - \sin^2 \theta$

$$= -8\sin \theta \cos \theta + 6\sin^2 \theta + 1$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta + 6 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 1$$

$$= -4\sin 2\theta - 3\cos 2\theta + 4$$

$$= 5\sin(2\theta + \alpha) + 4 \quad \left(\text{ただし } \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \sin \alpha = -\frac{3}{5} \right)$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$ よって、 y の最大値は $5 \cdot 1 + 4 = 9$

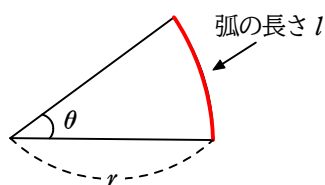
最小値は $5 \cdot (-1) + 4 = -1$

【5】 図において、OA, OBは半径1の円の互いに垂直な半径、PQはBOに平行で、四角形PQQ'P'は正方形である。図の斜線部分の面積をSとするとき

(1) $\angle POQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) において、Sを θ を用いて表せ。

(2) Sが最大になるときのPQの長さを求めよ。 (岡山大学)

【解答】 この問題では弧度法をちゃんと理解しているかが、ポイントになります。下図を見て弧度法の復習をしてみましょう。

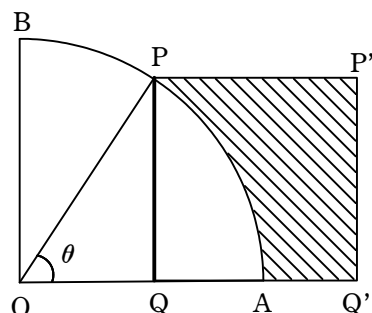


左図において、 θ は $\theta = \frac{l}{r}$ で定義されます。よって l は、 $l = r\theta$ となります。

また、この時の扇形の面積Sは、 $S = \frac{1}{2}rl$ で求めることができます。(※もっと根底から理解したい人は、青木塾のサイトのOpen教材のページにある「弧度法の理解」を参照して下さい。)

この考え方の右上の図に適用すると、 $\widehat{PA} = 1 \times \theta = \theta$ となり、扇形OAPの面積は $\frac{1}{2} \times 1 \times \theta = \frac{1}{2}\theta$ となります。

一方、三角比を利用すると、 $PQ = \sin \theta$, $OQ = \cos \theta$ となりますから、斜線部分の面積Sは



$S = (\text{正方形の面積}) - (\text{扇形OAPの面積} - \text{直角三角形OQPの面積})$ より

$$S = (\sin \theta)^2 - \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) = \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \theta$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \text{ となります。 (※先の合成を見越して、ここまで変形しました。)}$$

(2) まずは S を θ で微分しましょう。

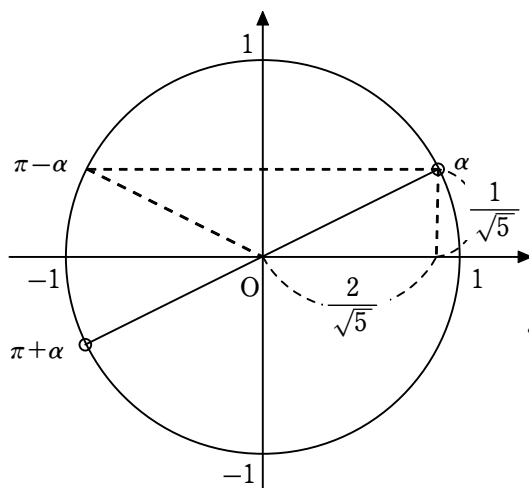
$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos 2\theta + \sin 2\theta - \frac{1}{2} = \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2}$$

ここで三角関数の合成を行います。 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ですから

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\sin 2\theta \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\theta \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2\theta + \alpha) - \frac{1}{2}$$

(但し、 $\cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \text{ とおいて解くと、 } \sin(2\theta + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ これを } \alpha < 2\theta + \alpha < \pi + \alpha \text{ で解くと}$$



$$2\theta + \alpha = \pi - \alpha \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

このとき、増減表は以下の通り。

θ	0	...	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$	/	+	0	-	/
S	/	↗	最大	↘	/

よって、 S が最大となるときの PQ の長さは

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ となる。}$$

($\frac{dS}{d\theta}$ の符号を判定するポイント)

上の単位円で、 $2\theta + \alpha$ の範囲が α より大きく $\pi - \alpha$ の範囲にあるとき、ちょうど $\sin(2\theta + \alpha)$ の値が 1 をとるところがあるが、その時、 $\frac{dS}{d\theta} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ となっていることに注目して欲しい。 $2\theta + \alpha$ の値が $\pi - \alpha$ の前後で

$\frac{dS}{d\theta}$ の符号は正から負に変化している。