ベクトル方程式を理解する①　　by Aokijuku

ベクトルが苦手な高校生達が、特に苦手とするのがベクトル方程式です。今回は、そのベクトル方程式について学びます。

【根底編】

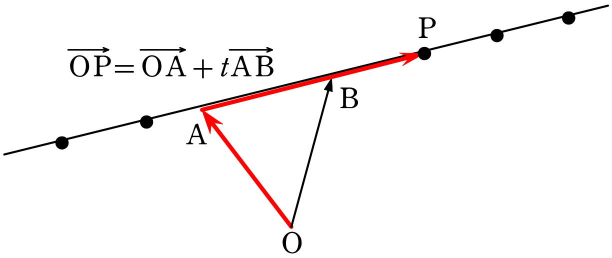
問題　△OABについて、点Pの位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と定義する。s,t について次の条件を満たすとき、点Pの存在範囲を求めなさい。

①$s+t=1$

解説　$s+t=1$ より、$s=1-t$

このとき、$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

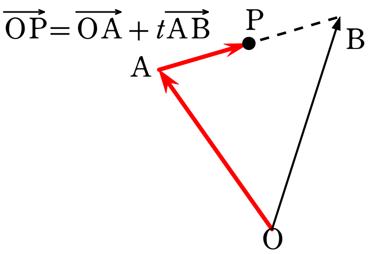
つまり、点Pは $\overrightarrow{OA}$ に $\overrightarrow{AB}$ の何倍かを足したベクトルの終点を表し、t が様々な実数を取ることによって、その集まりは、直線ABを描く。



②$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

解説　①のときと同様に、$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ となるが、

$s\geqq0$，$t\geqq0$ より、$s=1-t\geqq0$ かつ $t\geqq0$　つまり、$0\leqq t\leqq1$ となる。この時、点Pは線分ABの間を動き、その存在範囲は線分ABとなる。



左の図における点Pの位置は $t=\frac{1}{2}$ のときのものである。$t=0$ のとき、点Pは点Aと一致し、$t=1$ のとき、点Pは点Bと一致する。$0\leqq t\leqq1$ の範囲で t が様々な値をとると、点Pは２点A，Bの間を埋め尽くし、線分ABを描くことになる。

③$0\leqq s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

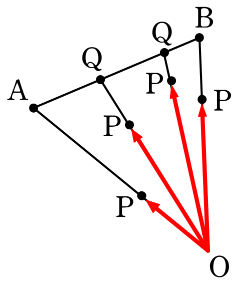
解説　３つ目は、やや難しく思うかも知れないが、一度読んで分からなければ、何度でも繰り返し注意しながら説明を読めばきっと分かるはずであるから、辛抱強く理解に努めて欲しい。

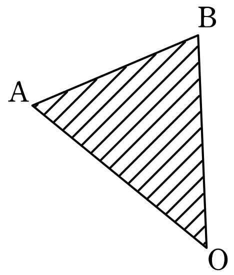
まず、$s+t=k$ とおく。この時、$0\leqq s+t\leqq1$ だから、$0\leqq k\leqq1$ となるが、$k\fallingdotseq0$ のとき、$s+t=k$ の両辺を k で割ると、$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$ となる。ここで、$\frac{s}{k}=s'$，$\frac{t}{k}=t'$ とおくと、$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$ が成り立つ。

このとき、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=k\left(\frac{s}{k}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{k}\overrightarrow{OB}\right)=k(s'\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{OB})$ となる。ここて、$s'\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ とおくと、一体、点Q はどんな図形を描くだろうか。$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$ より、点Qは線分ABを描くと分かる。

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(0<k\leqq 1)$ より、点Pは線分OQ上の点を動くと言える。（但し、$k\fallingdotseq 0$ より、原点Oは除かれる。）

では、$k=0$ のときは、どうなるのだろうか。$s+t=k$ だから、$k=0$ だとすると、$s+t=0$ となり、$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ であることより、$s=t=0$ となる。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ となり、点Pは原点Oを表すことになる。以上より、点Pは△OABの内部、および周上の点を描くと言える。





（※左図の斜線部分が点Pの存在範囲である。但し、境界線上の点を含む。）

【応用編】

問題　△OABがある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において、$2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき、点Pはどんな図形を描くか。

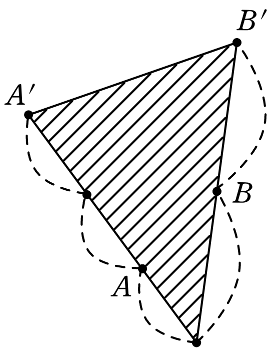
（ポイント）根底編でやった３つのタイプは、定理として使えるようになることが大切です。具体的にどう使うか、下の解答をしっかり理解し、他の問題でも使えるようになって欲しい。

解答　$2s+3t\leqq 6$ の両辺を6で割ると、$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$　　ここで、$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$　とおくと、

$s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$ となる。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ となり、$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とおくと、

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$ より、点Pは $\triangle OA'B'$ の内部、及び周上の点を描く。



（※左図の斜線部分が点Pの存在範囲である。但し、境界線上の点を含む。）

どうでしょうか。文字を置き換えることによって、③の定理にあてはまる形になったことが分かりましたか。