

(入試演習)

極方程式の復習

問題 a, h を正の定数とする。 xy 平面上の原点 $O(0, 0)$ からの距離と直線 $x = -a$ からの距離の比が $h : 1$ である点 P の軌跡を C とする。

- (1) 点 P の極座標を (r, θ) とするとき、軌跡 C を極方程式で表せ。
(2) C 上の 4 点 Q, R, S, T を考える。線分 QR と ST が原点で直交しているとき、

$\frac{1}{QR} + \frac{1}{ST}$ の値が 4 点の選び方によらず一定となることを示せ。

- (3) $0 < h < 1$ のとき、 C を x と y の方程式で表せ。また、 C がどのような図形となるか述べよ。

解答 (1) 点 P の極座標を (r, θ) とするとき $OP = r$

また、点 P から直線 $x = -a$ に下ろした垂線を PH と

すると $PH = r \cos \theta + a$

よって、 $OP : PH = h : 1$ から $OP = hPH$

すなわち $r = h(r \cos \theta + a)$

$$r(1 - h \cos \theta) = ha$$

$h > 0, a > 0$ のとき、右辺は正であるから

$$1 - h \cos \theta \neq 0 \quad \text{したがって} \quad r = \frac{ha}{1 - h \cos \theta}$$

参考 点 P が直線 $x = -a$ よりも左側にあるときは $PH = -r \cos \theta - a$ より

$$r = \frac{-ha}{1 + h \cos \theta} \text{ となる。}$$

しかし、極方程式では、 $r > 0$ のとき極座標が $(-r, \theta)$ である点は、極座標が

$(r, \theta + \pi)$ である点と考えるから、この場合も、 $\theta' = \theta + \pi$ の偏角に対して

$$r = -\frac{-ha}{1 + h \cos(\theta' - \pi)} = \frac{ha}{1 - h \cos \theta'}$$

という形で表される。

- (2) 右の図のように 4 点 Q, S, R, T があるとしても一般性を失わない。

点 Q の極座標を、 $Q\left(\frac{ha}{1 - h \cos \theta}, \theta\right)$ とおく。

このとき

$$S\left(\frac{ha}{1 + h \sin \theta}, \theta + \frac{\pi}{2}\right), R\left(\frac{ha}{1 + h \cos \theta}, \theta + \pi\right)$$

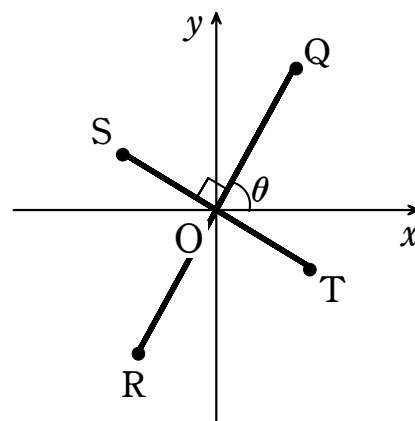
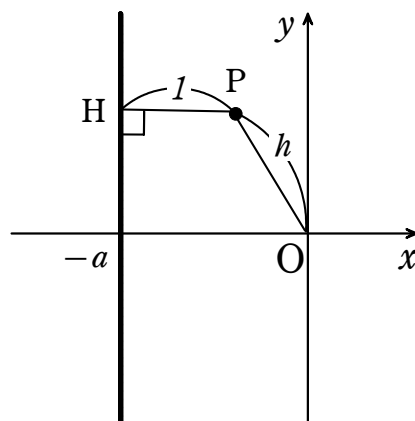
$$T\left(\frac{ha}{1 - h \sin \theta}, \theta + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\text{よって} \quad QR = \frac{ha}{1 - h \cos \theta} + \frac{ha}{1 + h \cos \theta} = \frac{2ha}{1 - h^2 \cos^2 \theta}$$

$$ST = \frac{ha}{1 + h \sin \theta} + \frac{ha}{1 - h \sin \theta} = \frac{2ha}{1 - h^2 \sin^2 \theta}$$

したがって

$$\frac{1}{QR} + \frac{1}{ST} = \frac{1 - h^2 \cos^2 \theta}{2ha} + \frac{1 - h^2 \sin^2 \theta}{2ha}$$



$$= \frac{2 - h^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2ha} = \frac{2 - h^2}{2ha}$$

ゆえに、 $\frac{1}{QR} + \frac{1}{ST}$ の値は4点の選び方によらず一定となる。

(3) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおく。

$$r = h(r \cos \theta + a) \text{ の両辺を2乗すると } r^2 = h^2(r \cos \theta + a)^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \theta \text{ を代入すると } x^2 + y^2 = h^2(x + a)^2$$

$$\text{したがって、} 0 < h < 1 \text{ のとき } (1 - h^2) \left(x - \frac{ah^2}{1 - h^2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2 h^2}{1 - h^2}$$

$$\text{すなわち } \frac{\left(x - \frac{ah^2}{1 - h^2} \right)^2}{\left(\frac{ah}{1 - h^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ah}{\sqrt{1 - h^2}} \right)^2} = 1$$

よって、 C が表す図形は楕円である。