

## 一次不等式を満たす整数解の個数

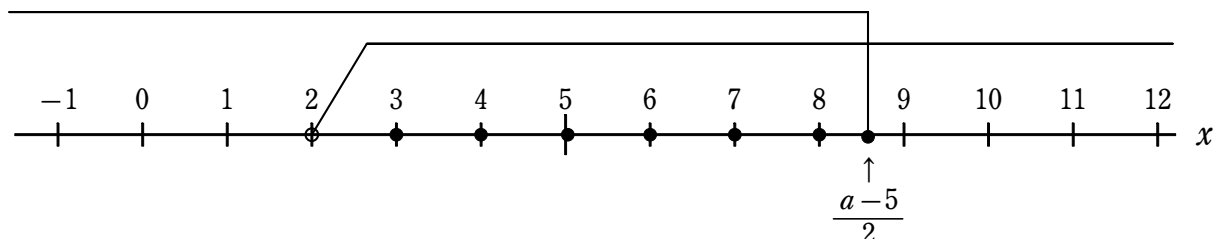
不等式について学び始めた頃に、多くの高校生の皆さんが引かかる問題があります。それはどんな問題かというと、下のような問題です。難しいと思ってしまうのは、恐らく $x$ の範囲と $a$ の範囲を混同してしまうことが原因だと思われます。今回、数直線を利用して分かり易く説明を試みますので、是非、しっかり理解に努めて下さい。

**例題** 次の連立不等式を満たす整数 $x$ がちょうど6個存在するとき、定数 $a$ の範囲を求めよ。

$$\begin{cases} 5x - 3 > 11 - 2x \\ 2x + a \geq 4x + 5 \end{cases}$$

**解答**  $\begin{cases} 5x - 3 > 11 - 2x \cdots \textcircled{1} \\ 2x + a \geq 4x + 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$      $\textcircled{1}$ を解くと  $x > 2 \cdots \textcircled{1}'$      $\textcircled{2}$ を解くと  $-2x \geq -a + 5$  より

$x \leq \frac{a-5}{2} \cdots \textcircled{2}'$      $\textcircled{1}'$ と $\textcircled{2}'$ の共通範囲に整数解が6個あるから、それを数直線上に表すと以下ようになります。



ここでポイントになるのは $\frac{a-5}{2}$ の位置です。 $\frac{a-5}{2}$ が8と9の間にあることは分かると思いますが、問題は等号の有無です。仮に $\frac{a-5}{2} = 8$ であるとしましょう。この時、 $\textcircled{2}'$ 式は $x \leq 8$ となりますから、 $\textcircled{1}'$ との共通範囲は $2 < x \leq 8$ となり、これを満たす整数 $x$ は3, 4, 5, 6, 7, 8で、ちょうど6個となります。つまり $\frac{a-5}{2}$ は8を含んでも良いことになります。では、 $\frac{a-5}{2} = 9$ となったらどうでしょうか。勿論、 $\textcircled{2}'$ 式は $x \leq 9$ となりますから、 $\textcircled{1}'$ との共通範囲は $2 < x \leq 9$ となり、今度は整数 $x$ の値に新たに9が含まれて、合計7個となり問題に適さないことになります。仮に $\frac{a-5}{2} = 8.9$ なら、 $\textcircled{1}'$ との共通範囲は $2 < x \leq 8.9$ となり、整数 $x$ に9は含まれず問題に適することになります。つまり $\frac{a-5}{2}$ の範囲は $8 \leq \frac{a-5}{2} < 9$ であれば良いことになります。これを解けば $a$ の範囲は求まり、答えは $21 \leq a < 23$ となります。どうでしょう。分かりましたか。