

複素数平面 ②（共役複素数の利用）

【1】 $2z + \overline{z} = 3 - 4i$ のとき、 z を求めなさい。

【2】 $z = 2 + \sqrt{3}i$ のとき $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2$ の値を求めよ。

【3】 $|z| = 2$ かつ $|z - 3| = 4$ を満たす複素数 z について、次の値を求めなさい。

- ① $z \overline{z}$
- ② $z + \overline{z}$

【4】 α, β は複素数とする。 $|\alpha| = |\beta| = 2, |\alpha + \beta| = 2\sqrt{3}$ のとき、 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ の値を求めなさい。

【5】 α, β は複素数とする。 $|\alpha| = |\beta| = 2, \alpha + \beta - 4 = 0$ のとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めなさい。

【6】 α, β は複素数とする。 $\beta \neq 0$ のとき、次のことを証明せよ。
 $\alpha \overline{\beta}$ が実数 $\Leftrightarrow \alpha = k\beta$ を満たす実数 k が存在する

【1】 $2z + \overline{z} = 3 - 4i \dots \textcircled{1}$ より $\overline{2z + \overline{z}} = \overline{3 - 4i}$
つまり $2\overline{z} + z = 3 + 4i \dots \textcircled{2}$
① $\times 2 - \textcircled{2}$ より
$$\begin{array}{r} 4z + 2\overline{z} = 6 - 8i \\ - \quad z + 2\overline{z} = 3 + 4i \\ \hline 3z = 3 - 12i \end{array}$$
よって $z = 1 - 4i$ となる。

【2】 $z + \frac{1}{z} = 2 + \sqrt{3}i + \frac{1}{2 + \sqrt{3}i} = 2 + \sqrt{3}i + \frac{2 - \sqrt{3}i}{(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)}$
 $= 2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i = 4$
よって $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = |4|^2 = 16$

【3】
① $|z| = 2$ より $|z|^2 = 4$ つまり $z \overline{z} = 4$
② $|z - 3| = 4$ より $|z - 3|^2 = 16$ つまり $(z - 3)(\overline{z} - 3) = 16$
 $z \overline{z} - 3(z + \overline{z}) + 9 = 16 \quad 4 - 3(z + \overline{z}) + 9 = 16$
 $-3(z + \overline{z}) = 3$ よって $z + \overline{z} = -1$ となる。

【4】 $|\alpha| = 2$ より $|\alpha|^2 = 4$ つまり $\alpha \overline{\alpha} = 4$ より $\overline{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \dots \textcircled{1}$
同様に $|\beta| = 2$ より $\overline{\beta} = \frac{4}{\beta} \dots \textcircled{2}$
ところで $|\alpha + \beta| = 2\sqrt{3}$ より $(\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = 12$
この式に①, ②を代入し $(\alpha + \beta)\left(\frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta}\right) = 12$ この両辺に $\alpha\beta$ をかけて
 $4(\alpha + \beta)^2 = 12\alpha\beta \quad 4\alpha^2 + 8\alpha\beta + 4\beta^2 = 12\alpha\beta$ よって $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ となる。

【5】 $|\alpha| = 2$ より $|\alpha|^2 = 4$ つまり $\alpha \overline{\alpha} = 4$ より $\overline{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \dots \textcircled{1}$
同様に $|\beta| = 2$ より $\overline{\beta} = \frac{4}{\beta} \dots \textcircled{2}$
 $\alpha + \beta - 4 = 0 \dots \textcircled{3}$ より $\overline{\alpha + \beta - 4} = 0$ つまり $\overline{\alpha} + \overline{\beta} - 4 = 0$
これに①, ②を代入し $\frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta} - 4 = 0$ 両辺に $\alpha\beta$ をかけて
 $4\beta + 4\alpha - 4\alpha\beta = 0 \quad \therefore \alpha\beta = \alpha + \beta \dots \textcircled{4}$ ③より $\alpha + \beta = 4 \dots \textcircled{3}'$
④と③'より $\alpha\beta = 4 \dots \textcircled{5}$ ③'の両辺を2乗し $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 16$
これに⑤を代入し $\alpha^2 + 8 + \beta^2 = 16 \quad \therefore \alpha^2 + \beta^2 = 8$

【6】 $\alpha \overline{\beta}$ が実数 $\Leftrightarrow \overline{\alpha \overline{\beta}} = \alpha \overline{\beta} \therefore \overline{\alpha}\beta = \alpha \overline{\beta} \Leftrightarrow \frac{\overline{\alpha}}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} (\because \beta \neq 0)$
 $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ が実数 $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = k$ (k は実数) とおくと $\alpha = k\beta$ となる。
つまり 「 $\alpha \overline{\beta}$ が実数 $\Leftrightarrow \alpha = k\beta$ を満たす実数 k が存在する」と言える。

補足 この証明で大切なのは、複素数 z が実数であることは、 $z = \overline{z}$ と同値であるということです。複素数 z が実数ならば、 $z = a$ (a は実数) と表せ、 $\overline{z} = a$ となり、 $z = \overline{z}$ が成り立つからです。