部分積分

by Aokijuku

問題　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ の公式を、微分の定義に従って導き出しなさい。

解答　$\{f(x)g(x)\}'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

問題　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ を変形すると　$f'(x)g(x)=\{f(x)g(x)\}'-f(x)g'(x)$ あるいは
$f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$ となります。　これらの両辺を x で積分すると、どうなりますか。

解答　$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$　また　$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

問題　$\int_a^b f'(x)g(x)dx$ と $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ の計算結果をそれぞれ答えなさい。

解答　$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$　　$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

例題　$\int_1^e \dfrac{\log x}{x^3}dx$ の計算をしなさい。

解答　$\int_1^e \dfrac{\log x}{x^3}dx=\int_1^e \log x\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'dx=\left[-\dfrac{1}{2x^2}\log x\right]_1^e-\int_1^e\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)dx$

$$=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\int_1^e\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^e=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2e^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$$

例題　$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\sin^2 x}dx$ の計算をしなさい。

解答　$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\left(-\dfrac{1}{\tan x}\right)'dx=\left[-\dfrac{x}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\dfrac{1}{\tan x}\right)dx$

$$=\left\{-\frac{\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\right\}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\Big[\log|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\log\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}+\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\log 2=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}+\frac{1}{2}\log 3-\log 2+\log 2$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}+\frac{1}{2}\log 3$$