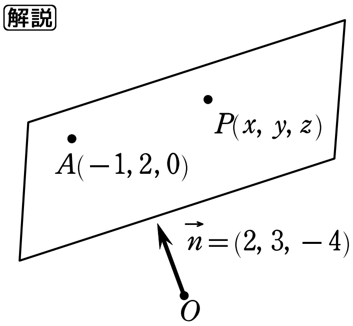
空間ベクトルの重要問題②（平面のベクトル方程式） by Aokijuku

（平面のベクトル方程式：考え方）

これは全てのベクトル方程式について言えることですが、ある図形の方程式について考える場合、その図形上の全ての点について成り立つ式がベクトルで表せるなら、それが求める図形のベクトル方程式となります。具体的な例で説明しましょう。

問題 点 $A(-1,2,0)$ を通り、$\vec{n}=(2,\ 3,\ -4)$ に垂直な平面の方程式をベクトルを使って求めなさい。

解説



左図のように、求める平面上の任意の点を$P(x,\ y,\ z)$とすると、点Pが求める平面上のどこにあったとしても　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\cdots$ ①が成り立ちます。

ところで、$\vec{n}=(2,3,-4)$ で　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x+1,\ y-2,\ z)$ だから

①式より　$2(x+1)+3(y-2)-4z=0$　つまり $2x+3y-4z-4=0$ となります。これが求める平面の方程式となります。

補足　このように、空間における平面の方程式は、x,y,z の一次式として表されます。ところで、気づいているかも知れませんが、x,y,z それぞれの文字の係数を組み合わせると、その平面の法線ベクトル（の１つ）となります。この場合、$(2,3,-4)$ となりますが、なぜ「法線ベクトルの１つ」なのかというと、平面の法線ベクトルとは平面に垂直なベクトルのことをいいますが、長さが色々だったり、向きが全く正反対であるものなど沢山あるからです。但し、x,y,z の係数を組にした法線ベクトルが最も手軽な法線ベクトルと言えますね。

（３点の座標で決まる平面の方程式）

写真撮影の際に使用する三脚のことを知っていると思いますが、なぜ三脚を利用するとぶれない写真を撮影することが出来るのでしょうか。それは、三脚を使えば少々地面に凸凹があっても安定するからですね。これは、一直線上にない３点で平面が決まるということを意味しています。

問題　３点 $A(1,0,-2)$ 、$B(0,3,-1)$ 、$C(2,-4,0)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

注意　平面の方程式は、x,y,z の一次式で表されますから、その一般形は $ax+by+cz+d=0$ と表せます。よく考えて下さい。この式には値の分からない a,b,c,d ４つの文字が使われています。未知数（値の分からない文字）の数と方程式の数が一致しないと方程式は解けないはずですが、どうして３点の座標で平面が決まるのでしょうか。そのことに注意して、以下の説明の理解に努めて下さい。

解答　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ と置くと、この平面上には、３点 $A(1,0,-2)$ 、$B(0,3,-1)$ 、$C(2,-4,0)$が存在するので、$\begin{cases} a-2c+d=0 \\ 3b-c+d=0 \\ 2a-4b+d=0 \end{cases}$ が成り立ちます。この３式を d を数字として見なして解くと、

$(a,b,c)=\left(-\frac{5}{4}d,\ -\frac{3}{8}d,\ -\frac{1}{8}d\right)$ となります。これらを $ax+by+cz+d=0$ に代入すると

$-\frac{5}{4}dx-\frac{3}{8}dy-\frac{1}{8}dz+d=0\cdots$① となります。ところで $d=0$ だとすると、平面は存在しないことになりますか

ら、$d \fallingdotseq 0$ だと言えます。よって、①式の両辺を d で割って $-\frac{5}{4}x-\frac{3}{8}y-\frac{1}{8}z+1=0$ となり、この両辺に-8を掛けて、求める式は　$10x+3y+z-8=0$ となります。