（入試演習）　色々な数列

問題 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2+3n+2$ で表されているとする。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\dfrac{S_1S_3}{S_2}+\dfrac{S_2S_4}{S_3}+\dfrac{S_3S_5}{S_4}+\cdots\cdots+\dfrac{S_nS_{n+2}}{S_{n+1}}$ を求めよ。

(3) $\dfrac{S_4}{S_3S_5}+\dfrac{S_7}{S_6S_8}+\dfrac{S_{10}}{S_9S_{11}}+\cdots\cdots+\dfrac{S_{3n+1}}{S_{3n}S_{3n+2}}$ を求めよ。

解答 (1) $S_n=(n+1)(n+2)$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)(n+2)-n(n+1)$$
$$=(n+1)(n+2-n)=2(n+1)\quad\cdots\cdots①$$

また　$a_1=S_1=2\cdot 3=6$

ここで，① において $n=1$ とすると　$a_1=4$

よって，$n=1$ のときに ① は成り立たない。

したがって，求める一般項は　$a_1=6$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2(n+1)$

(2) 求める和を T とする。

$$\frac{S_kS_{k+2}}{S_{k+1}}=\frac{(k+1)(k+2)\cdot(k+3)(k+4)}{(k+2)(k+3)}=(k+1)(k+4)=k^2+5k+4$$

であるから

$$T=\sum_{k=1}^{n}(k^2+5k+4)=\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+4\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+15(n+1)+24\}$$
$$=\frac{1}{3}n(n^2+9n+20)=\frac{1}{3}n(n+4)(n+5)$$

(3) 求める和を U とする。

$$\frac{S_{3k+1}}{S_{3k}S_{3k+2}}=\frac{(3k+2)(3k+3)}{(3k+1)(3k+2)\cdot(3k+3)(3k+4)}=\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)$$

であるから

$$U=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{n}{4(3n+4)}$$