

定点を通る接線の本数（応用編 ①）

定点を通る接線の本数の問題については、数Ⅱでも何度かやっていますが、数Ⅲでも頻出問題の1つです。今回はそんな入試問題を研究してみましょう。

問題 a は実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線の中で、点 $P(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。 $n(a)$ を求めよ。但し、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ と用いても良い。

問題 この種の問題は解き方の定石があって、その通りやれば必ず解けます。では、始めましょう。

まず、 $y=f(x)=e^x$ とおくと、 $f'(x)=e^x$ 接点の座標を (t, e^t) とすると、 $f'(t)=e^t$ より、法線の方程式は $y-e^t=-\frac{1}{e^t}(x-t)$ これが点 $P(a, 3)$ を通るので、 $3-e^t=-\frac{1}{e^t}(a-t)$ この式を a について解くと

$a=e^{2t}-3e^t+t$ となる。このとき、 $y=a$ と $y=e^{2t}-3e^t+t$ において、2つのグラフの交点の数を考えれば良い。

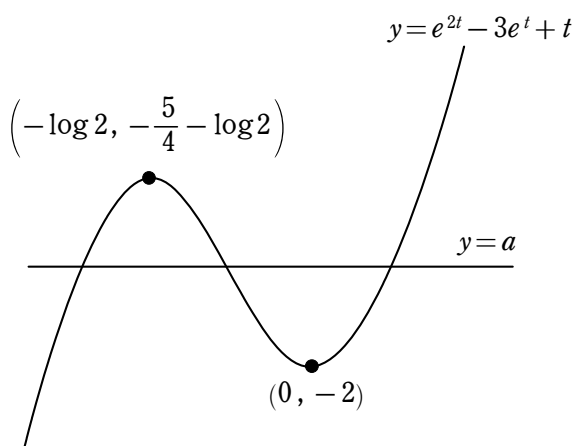
$y=e^{2t}-3e^t+t$ より、 $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-3e^t+1$ $\frac{dy}{dt}=0$ において解くと、 $(2e^t-1)(e^t-1)=0$ よって

$e^t=\frac{1}{2}, 1$ より、 $t=\log \frac{1}{2}, 0=-\log 2, 0$ このとき、 $y=e^{2t}-3e^t+t$ の増減表は以下のようになる。

t	...	$-\log 2$	...	0	...
$\frac{dy}{dt}$	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$-\frac{5}{4}-\log 2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2t}-3e^t+t)=-\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2t}-3e^t+t)=\infty$ となり

$y=a$ と $y=e^{2t}-3e^t+t$ のグラフの関係は以下のようになり、 $n(a)$ については、次のように場合分け出来る。



$$n(a) = \begin{cases} 1 & (a < -2, -\frac{5}{4} - \log 2 < a) \\ 2 & (a = -2, -\frac{5}{4} - \log 2) \\ 3 & (-2 < a < -\frac{5}{4} - \log 2) \end{cases}$$