（共通テスト対策⑤）

問題　k を実数として，x の整式 $P(x)$ を $P(x)=x^3+kx^2+(2k+1)x+k+2$ とする。3 次方程式 $P(x)=0$ は一つの実数解と異なる二つの虚数解 α，β をもつとする。

(1)　どのような k の値に対しても $P\left(-\boxed{\text{ア}}\right)=0$ であるから，因数定理により

$P(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left\{x^2+\left(k-\boxed{\text{イ}}\right)x+k+\boxed{\text{ウ}}\right\}$ が成り立つ。以下，

$Q(x)=x^2+\left(k-\boxed{\text{イ}}\right)x+k+\boxed{\text{ウ}}$ とする。

2 次方程式 $Q(x)=0$ は異なる二つの虚数解をもつので，k のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{エオ}}<k<\boxed{\text{カ}}$ である。

α，β は $Q(x)=0$ の解であるので，解と係数の関係により，$\alpha^2+\beta^2$ は k を用いて

$\alpha^2+\beta^2=k^2-\boxed{\text{キ}}k-\boxed{\text{ク}}$ と表される。したがって，$\alpha^2+\beta^2$ は $k=\boxed{\text{ケ}}$ で最小値 $\boxed{\text{コサ}}$ をとることがわかる。また，$k=\boxed{\text{ケ}}$ のとき $\alpha^2\beta^2=\boxed{\text{シス}}$，$\alpha^4+\beta^4=\boxed{\text{セソ}}$ である。

(2)　$k=\boxed{\text{ケ}}$ のとき，$P(x)=0$ の異なる二つの虚数解は $\dfrac{-\boxed{\text{タ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}\,i}{2}$ である。

以下 $\alpha=\dfrac{-\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{-\boxed{\text{タ}}-\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}\,i}{2}$ とし，$X=\alpha+\beta i$，$Y=\alpha-\beta i$ とする。

X^4+Y^4 を α，β を用いて表そう。X^4，Y^4 のそれぞれに，二項定理を用いて整理すると $X^4+Y^4=\boxed{\text{テ}}(\alpha^4+\beta^4)-\boxed{\text{トナ}}\alpha^2\beta^2$ となる。

このとき，$\alpha^2\beta^2=\boxed{\text{シス}}$，$\alpha^4+\beta^4=\boxed{\text{セソ}}$ であるから，X^4+Y^4 の値は $\boxed{\text{ニヌネノ}}$ である。

解答

(1)　$P(-1)=(-1)^3+k\cdot(-1)^2+(2k+1)\cdot(-1)+k+2=-1+k-2k-1+k+2=0$

よって，どのような k の値に対しても　$P(-{}^{ア}1)=0$

このとき，因数定理により

$P(x)=(x+1)\{x^2+(k-{}^{イ}1)x+k+{}^{ウ}2\}$

1	k	$2k+1$	$k+2$	$\lfloor -1$
	-1	$-k+1$	$-k-2$	
1	$k-1$	$k+2$	0	

$Q(x)=x^2+(k-1)x+k+2$ であり，2 次方程式 $Q(x)=0$ は異なる 2 つの虚数解をもつから，判別式を D とすると　$D<0$

$D=(k-1)^2-4(k+2)=(k+1)(k-7)$ であるから　$(k+1)(k-7)<0$

よって　${}^{エオ}-1<k<{}^{カ}7$

2 次方程式 $Q(x)=0$ の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-(k-1)$，$\alpha\beta=k+2$

このとき　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\{-(k-1)\}^2-2(k+2)$

$\qquad=k^2-{}^{キ}4k-{}^{ク}3=(k-2)^2-7$

したがって，$\alpha^2+\beta^2$ は $k={}^{ケ}2$ で最小値 ${}^{コサ}-7$ をとる。

また，$k=2$ のとき　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=4$

よって　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4^2={}^{シス}16$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-7)^2-2\cdot16={}^{セソ}17$

(2)　$k=2$ のとき　　$Q(x)=x^2+x+4$

$P(x)=0$ の異なる 2 つの虚数解は，$Q(x)=0$ の解で　　$x=\dfrac{-^{タ}1\pm\sqrt{^{チツ}15}\,i}{2}$

また，二項定理により

$X^4=(\alpha+\beta i)^4={}_4\mathrm{C}_0\alpha^4+{}_4\mathrm{C}_1\alpha^3(\beta i)+{}_4\mathrm{C}_2\alpha^2(\beta i)^2+{}_4\mathrm{C}_3\alpha(\beta i)^3+{}_4\mathrm{C}_4(\beta i)^4$

$=\alpha^4+4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3 i+\beta^4$

$Y^4=(\alpha-\beta i)^4={}_4\mathrm{C}_0\alpha^4+{}_4\mathrm{C}_1\alpha^3(-\beta i)+{}_4\mathrm{C}_2\alpha^2(-\beta i)^2+{}_4\mathrm{C}_3\alpha(-\beta i)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-\beta i)^4$

$=\alpha^4-4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3 i+\beta^4$

よって

$X^4+Y^4=(\alpha^4+4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3 i+\beta^4)+(\alpha^4-4\alpha^3\beta i-6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3 i+\beta^4)$

$={}^{テ}2(\alpha^4+\beta^4)-{}^{トナ}12\alpha^2\beta^2$

(1) より，$\alpha^2\beta^2=16$，$\alpha^4+\beta^4=17$ であるから

$X^4+Y^4=2\cdot17-12\cdot16={}^{ニヌネノ}-158$