２円の交点を通る円と直線

「2つの円 $x^2+y^2=16$, $(x-5)^2+(y+6)^2=25$ の交点と原点を通る円の方程式を求めなさい。」という問題が与えられたとき、それをどうやって解けば良いか分かりますか。おそらく、求める円の方程式を $(x-5)^2+(y+6)^2-25+k(x^2+y^2-16)=0 \cdots$ ① と置けば良いということくらいは、耳にしたことがあると思いますが、問題は「なぜ、そのように置けるか」ということです。

そのことを理解するには、2つのポイントがあります。1つ目は、①の方程式が与えられた2つの円の交点を通っていること。そしてもう１つが、①の方程式が円を表わしているということです。では、まず１つ目から説明しましょう。

①の方程式が２つの円の交点を通ることを説明するには、何も２つの円の交点を求める必要はありません。次のように説明すれば良いのです。

２円の交点の座標を仮に (p, q) とすると、この点は２円の上に存在しますから、２つの円の方程式を同時に満たします。つまり　$p^2+q^2=16$, $(p-5)^2+(q+6)^2=25 \cdots$ ②　が成り立ちます。次に①の方程式の左辺の x, y に $(x, y)=(p, q)$ を代入してみましょう。

すると　(①式の左辺)$=(p-5)^2+(q+6)^2-25+k(p^2+q^2-16)$ となりますね。ところで、これに②を代入すると (①式の左辺)$=25-25+k(16-16)=0$ となります。すなわち、２円の交点 (p, q) は①式を満たしていることになります。ここで大切なことは、次のことです。

「グラフの上の点の座標は、そのグラフの方程式を満たす」

⇔　「グラフの方程式を満たす座標は、そのグラフ上にある」

つまり２円の交点 (p, q) は① の方程式を満たし、①の方程式で表されるグラフ上にあることが言えたことになります。

次は、①の方程式が円を表わしているかどうかですが、①の式を x, y について整理すると $(1+k)x^2+(1+k)y^2-10x+12y+36-16k=0$　となりますね。この両辺を $1+k$ （但し、$1+k \fallingdotseq 0$ ）で割ると $x^2+y^2-\dfrac{10}{1+k}x+\dfrac{12}{1+k}y+\dfrac{36-16k}{1+k}=0 \cdots$ ③となりますが、これは円の方程式を展開して整理したものが、一般的に　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ と置けることから、この式が円の方程式の形をしているとは言えますね。但し $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の式は　$\left(x+\dfrac{l}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{m}{2}\right)^2=\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n$ と変形でき、$\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ を満たさなければ円にはなりません。しかし、元の２つの円が２点で交われば、③式は必ず $\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{m^2}{4}-n>0$ が成り立ちます。

以上より、①の方程式が与えられた②円の交点を通る円の方程式であることが言えたことになります。

ところで、①式で $1+k=0$　つまり $k=-1$ となると、①式は一体何を表しているのでしょうか。 $k=-1$ のとき x^2 と y^2 の項がなくなり、①式は　$-10x+12y+52=0$　つまり $5x-6y-26=0$ という x, y についての一次式となります。 x, y の一次式は直線を表しますね。 $k=-1$ であっても①式が２円の交点を満たすこと自体は変わりませんから、この x, y の一次式は２円の交点を通る直線を表すことになります。

じゃあ、ここで改めて冒頭の問題「2つの円 $x^2+y^2=16$, $(x-5)^2+(y+6)^2=25$ の交点と原点を通る円の方程式を求めなさい。」を解いて見ましょう。

与えられた２円の交点を通る円の方程式を $(x-5)^2+(y+6)^2-25+k(x^2+y^2-16)=0 \cdots$(※)　とおくと、これは原点を通るから、$(x, y)=(0, 0)$ を代入すると　$36-16k=0$ つまり $k=\dfrac{9}{4}$ となります。これを（※）式に代入して整

理すると

$\frac{13}{4}x^2+\frac{13}{4}y^2-10x+12y=0$ となり、更に整理すると

$x^2+y^2-\frac{40}{13}x+\frac{48}{13}y=0$ $\left(x-\frac{20}{13}\right)^2+\left(y+\frac{24}{13}\right)^2=\frac{20^2}{13^2}+\frac{24^2}{13^2}$

すなわち $\left(x-\frac{20}{13}\right)^2+\left(y+\frac{24}{13}\right)^2=\frac{976}{169}$ となりますね。これが与えられた２円の交点と原点を通る円となるわけです。