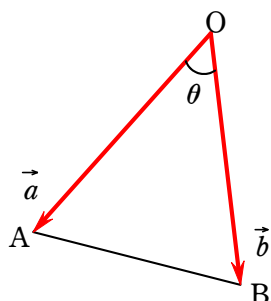


内積を利用した三角形の面積（応用編）

ベクトルを使って三角形の面積を求める問題は、結構、ポピュラーなのですが、一見してそれとは気づきにくい問題もあります。今回は、そんな問題を学びます。

まずは、ベクトルを使った三角形の面積の求め方を復習しましょう。



左図において、 $\triangle OAB$ の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \theta$ で求めることは、皆さんもご存じだと思います。ところで、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと、 $OA = |\vec{a}|$ 、 $OB = |\vec{b}|$ と表せますから、 $S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ となります。

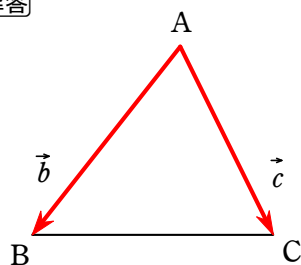
さて、三角形において $0^\circ < \theta < 180^\circ$ であることから $\sin \theta > 0$ に注意すると、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ となり

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta} \quad \text{と表せることが分かります。}$$

きっと皆さんは覚えていると思いますが、この式の中で $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表していますから、 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ より、上の式は、 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ と表せます。まずは、このことをしっかり頭に入れておいて下さい。では、早速、本番に入りましょう。

問題 $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = p$ 、 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = q$ 、 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = r$ とおいたとき、 $\triangle ABC$ の面積を p, q, r で表して下さい。

解答



左図のように、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおくと、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = p$ より
 $\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = p$ つまり $|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = -p \dots \textcircled{1}$ また、 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = q$ より
 $-\vec{c} \cdot \vec{b} = q$ つまり $\vec{b} \cdot \vec{c} = -q \dots \textcircled{2}$ さらに、 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = r$ より
 $(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (-\vec{c}) = r$ つまり $|\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = -r \dots \textcircled{3}$ となります。
ここまで来たら、察しの良い人なら既に気づいていると思いますが、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、これらを $|\vec{b}|^2$ 、 $|\vec{c}|^2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ についての連立方程式と見なすと、未知数

(値の分かっていない文字のこと) が3つで、式が3本ありますから、 p, q, r を定数と見なすと、 $|\vec{b}|^2$ 、 $|\vec{c}|^2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ をそれぞれ p, q, r を使って表すことが出来ると言えます。つまり、 $\triangle ABC$ の面積を S としたとき、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} \quad \text{より、} S \text{ は } p, q, r \text{ で表すことが出来ることになります。実際にやってみましょう。まずは}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、 $|\vec{b}|^2 = -p - q$ 、次に $\textcircled{2} + \textcircled{3}$ より、 $|\vec{c}|^2 = -q - r$ 、更に $\textcircled{2}$ より、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = -q$ 。このとき

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-p-q)(-q-r) - (-q)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{pq + rq + q^2 + qr - q^2} = \frac{1}{2} \sqrt{pq + qr + rq} \quad \text{と表}$$

せます。どうでしょう。分かりましたか。この問題は、とても良質な問題だと思いますので、是非、繰り返し学んで確実にマスターして下さいね。