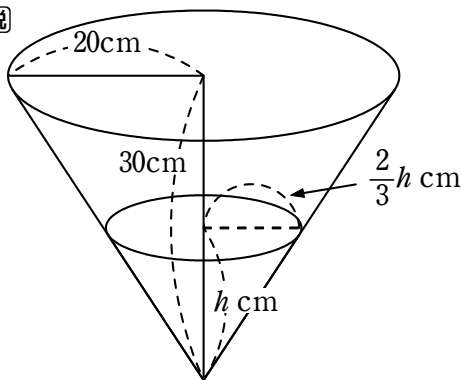


数Ⅲの微積分はとても物理学と親和性が高く、様々な実際的问题を微積分を使って解くことができます。これからシリーズで「微積分の物理への応用」と題し、一緒に勉強していきたいと思います。しっかり勉強して、是非、マスターしてくださいね。では、早速スタートしましょう。

【例題】 深さが30 cm、上面の半径が20 cmの直円錐型の容器があります。この容器を先端部が下、軸が鉛直になるように設置し、それに毎秒20 cm³の割合で水を注ぐとき、水の深さが15 cmになった瞬間の水面の上昇する速さと、水面の面積の増加する速さを求めなさい。

【解説】



左の図のように、水の深さが h cmの時の水面の形は半径が $\frac{2}{3}h$ cmの円となるから、そのときの水面の面積を S cm²、水の体積を V cm³ とすると、

$$S = \frac{4}{9}\pi h^2, \quad V = \frac{4}{27}\pi h^3 \quad \text{と表されます。}$$

まず、 $V = \frac{4}{27}\pi h^3$ の両辺を時間 t (単位は秒) で微分すると

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{27}\pi h^3 \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{4}{27}\pi h^3 \right) \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

となります。ところで $\frac{dV}{dt}$ は、時間に対する体積の変化の割合ですから、水を注ぐ割合を意味し、条件にあるように

$$\frac{dV}{dt} = 20 \quad \text{となります。また、深さは15 cm ですから } h = 15 \text{ となり、これらを } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \text{ に代入すると、}$$

$$20 = \frac{4}{9}\pi \times 225 \times \frac{dh}{dt} \quad \text{となり、これを計算すると } \frac{dh}{dt} = \frac{1}{5\pi} \quad (\text{cm/秒}) \text{ となります。}$$

次に、 $S = \frac{4}{9}\pi h^2$ の両辺を時間 t (単位は秒) で微分すると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{9}\pi h^2 \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{4}{9}\pi h^2 \right) \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9}\pi h \cdot \frac{dh}{dt} \quad \text{となります。これに上記の } h = 15, \frac{dh}{dt} = \frac{1}{5\pi} \text{ を代入し}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{8}{9}\pi \times 15 \times \frac{1}{5\pi} = \frac{8}{3} \quad (\text{cm}^2/\text{秒})$$

以上より、求める水面の上昇する速さは $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{5\pi}$ (cm/秒)、水面の面積の増加する速さは

$$\frac{dS}{dt} = \frac{8}{3} \quad (\text{cm}^2/\text{秒}) \text{ となります。}$$

どうですか。こういう問題は、数ⅠAⅡBまでの数学では到底解くことができません。数Ⅲの微積分がいかに素晴らしいか分かってくれたでしょうか。

【注】 この問題の理解には、合成微分の知識が欠かせません。合成微分が分からない人は、このサイトにある「合成微分の考え方」を使って、勉強してくださいね。