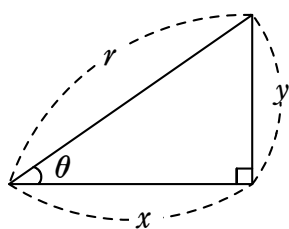
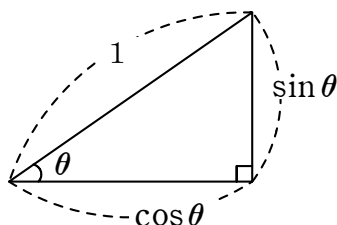


三角形の辺の長さ と 面積

by Aokijuku



左図において、三角比については、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ の関係が成り立ちます。ところで、相似の三角形であれば、上記の3つの三角比の値は、どんな三角形でも、それぞれ同じ値をとります。仮に r が1であっても、各三角比の値に違いはありません。しかし、 $r=1$ のときを考えることで、三角比の応用範囲は劇的に広がります。

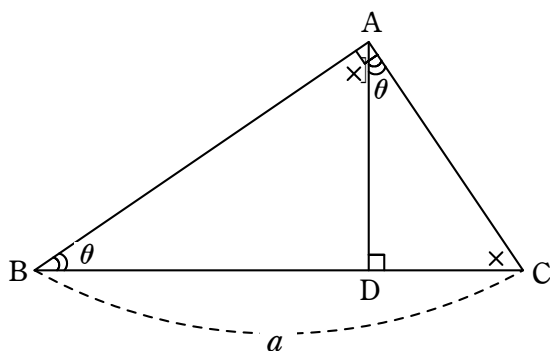
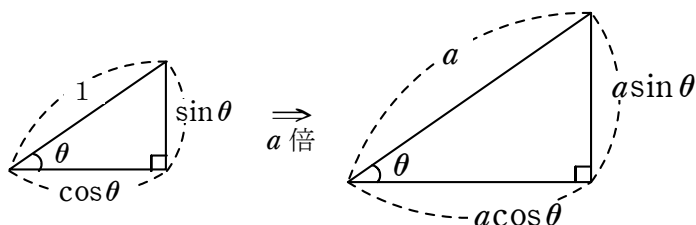


$\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ で $r=1$ となると、 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ が成り立ち、左図のようになります。

では、斜辺が a になったら、他の辺の長さはどうなるでしょうか。

左下の図のように、三角形全体が a 倍されるのだから、底辺は $a \cos \theta$ に、

高さは $a \sin \theta$ になることになります。この考え方が分かると、その利用範囲がぐっと広がります。



左下の三角形で、そのことを確かめてみましょう。まず、 $\triangle ABC$ に着目して下さい。ABの長さを a と θ で表すとどうなるでしょうか。もし、 $BC=1$ なら、上で学んだように $AB = \cos \theta$ となります。ところが、実際のBCは、その a 倍ですから、ABも a 倍されて、 $AB = a \cos \theta$ となります。

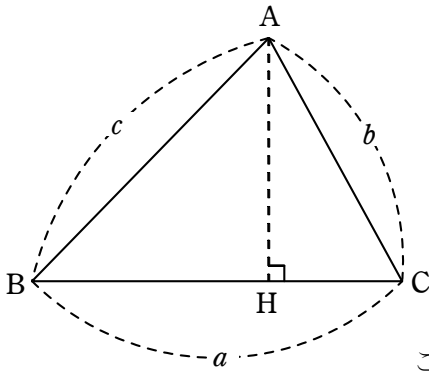
では、ACを a と θ で表すとどうなるでしょうか。先と同じように、 $BC=1$ なら、 $AC = \sin \theta$ となります。ところが、実際は $BC = a$ ですから、ACも a 倍となり、 $AC = a \sin \theta$ となります。

今度は、 $\triangle ABD$ に着目して下さい。ADを a と θ で表すとどうなるでしょうか。もし、 $AB=1$ なら、勿論、 $AD = \sin \theta$ となります。ところが、実際のABの長さは、その $a \cos \theta$ 倍ですから、同じようにADも $a \cos \theta$ 倍となり、 $AD = a \sin \theta \cos \theta$ となります。では、BDを a と θ で表すとどうなりますか。 $AB=1$ なら、 $BD = \cos \theta$ です。ところが、実際は $AB = a \cos \theta$ ですから、BDも $a \cos \theta$ 倍されて、 $BD = a \cos^2 \theta$ となります。

さて、次は $\triangle ADC$ に着目しましょう。CDを a と θ で表すとどうなるでしょうか。 $AC=1$ なら、 $CD = \sin \theta$ となります。実際は、 $AC = a \sin \theta$ ですから、本当のCDの長さは $CD = a \sin^2 \theta$ となります。

どうですか。三角形の辺の長さ と 三角比の関係が理解出来ましたか。このことが分かったついでに、次ページでは、三角形の面積 と 三角比の関係について勉強しましょう。

三角形の辺の長さとの面積



$\triangle ABH$ に着目し、 AH を c と角 B で表すとどうなりますか。もう、前ページで考え方は分かりましたよね。その通りです。 $AH = c \sin B$ となります。よって、小学校で学んだ $\frac{1}{2} \times \text{底辺} \times \text{高さ}$ という三角形の面積の公式を使うと、 $\triangle ABC$ の面積を S としたとき
$$S = \frac{1}{2} \times a \times c \sin B \quad \text{つまり、} \quad S = \frac{1}{2} a c \sin B$$
 となります。

この面積の式をよく見ると

(三角形の面積) $= \frac{1}{2} \times (\text{隣合う2辺の長さの積}) \times (\text{2辺の間の角の正弦})$ となっていますから、結局、こ

のやり方で面積を求める方法は3通りあり

$$S = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} c a \sin B \quad \text{となることが分かります。}$$

[ヘロンの公式について]

三角形の面積の求め方で、辺の長さだけを使うヘロンの公式と呼ばれるものがあります。ついでに、それについても勉強しましょう。

余弦定理を利用すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} a b \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{1}{2} a b \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} a b \sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}} = \sqrt{\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{\{(a+b)^2 - c^2\} \{c^2 - (a-b)^2\}}{16}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)}{16}} \end{aligned}$$

ここで $a+b+c=2s$ とおくと

$$S = \sqrt{\frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{16}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{となります。}$$