

【1】命題とは何ですか。

【解答】 命題とは、真 (正しいこと) か偽 (間違っていること) かが、客観的に判断できる文や式のことを言います。

【2】次の事柄は命題ですか。命題の場合は、その真偽を言いなさい。

- ①長方形は平行四辺形である。                      ②32を5で割ると2余る。  
 ③ $1+1=3$                       ④1.414は $\sqrt{2}$ の良い近似値である。

【解答】 ①命題である。/ 長方形の定義は「4つの角が等しい四角形」ですが、四角形が平行四辺形になるための条件「2組の向かい合う角がそれぞれ等しい」を満たすので、この命題は真と判断できます。

②命題である。/ 確かに32を5で割ると2余り、真と分かります。

③命題である。/  $1+1=2$ ですから、偽と分かります。

④命題ではない。/ 「良い」という言葉に客観的な基準はありませんから、真か偽か判断が出来ません。

【3】命題には「 $p \Rightarrow q$ 」

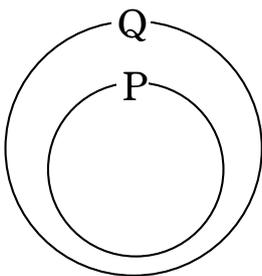
(※「 $p$ ならば $q$ 」と読みます。 $p$ を「仮定」、 $q$ を「結論」と言います。) の形を取るものが多いですが、次の命題が真か偽かを答えなさい。

- ①  $x^2=4 \Rightarrow x=2$                       ②  $x=2 \Rightarrow x^2=4$   
 ③  $(x-2)(x+3)=0 \Rightarrow (x+1)(x+3)=0$                       ④  $(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+2)=0$   
 ⑤  $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

【解答】 ①偽    ②真    ③偽    ④真    ⑤真

【4】数学的に言って、真とはどういうことを言いますか。

【解答】  $p \Rightarrow q$  の形の命題で、 $p$  という条件を満たす解の集合を  $P$  とし、 $q$  という条件を満たす解の集合を  $Q$  とすると、 $P \subset Q$  を満たすとき、その命題は真だと言えます。(  $P \subset Q$  とは、集合  $P$  が集合  $Q$  の部分集合であることを意味します。つまり、集合  $P$  の要素が全て集合  $Q$  の要素であること表しています。



図で表すと左のようになります。勿論、 $P$ と $Q$ が完全に重なる場合も真となります。

【5】  $x$  は実数とします。集合を用いて、次の命題の真偽を調べなさい。

①  $x > 5 \Rightarrow |x-1| > 3$                       ②  $|x+1| < 2 \Rightarrow -3 \leq x < 2$                       ③  $|x| \leq 1 \Rightarrow |x-2| < 3$

【解答】 ①  $|x-1| > 3$  を解くと、 $x-1 < -3, 3 < x-1$  つまり  $x < -2, 4 < x$  となります。ここで

$P = \{x \mid x > 5, x \text{ は実数}\}$ 、 $Q = \{x \mid |x-1| > 3, x \text{ は実数}\}$  とすると、 $P \subset Q$  が成り立っているから、この命題は真だと言えます。

②  $|x+1| < 2$  を解くと、 $-2 < x+1 < 2$  つまり  $-3 < x < 1$  となります。ここで

$P = \{x \mid |x+1| < 2, x \text{ は実数}\}$ 、 $Q = \{x \mid -3 \leq x < 2, x \text{ は実数}\}$  とすると、 $P \subset Q$  が成り立っているから、この命題は真だと言えます。

③  $|x| \leq 1$  の絶対値記号を外すと  $-1 \leq x \leq 1$  となり、 $|x-2| < 3$  を解くと  $-3 < x-2 < 3$  つまり、 $-1 < x < 5$  となります。 $-1$  は仮定に含まれていますが、結論には含まれていません。つまり、 $P \subset Q$  が成り立っていませんから、この命題は偽だと言えます。

【6】 上の問題のように、ある命題が真だということを示すには、それなりに面倒な手続きを踏まねばなりません、偽だということを示すのは、実は簡単です。その方法を言いなさい。

【解答】 反例、つまり「仮定は満たすが、結論を満たさないもの」をあげれば良いのです。ところで、なぜ反例をあげたら、その命題は偽であると言えるのでしょうか。実は、それは嘘にとっても似ています。例えば、テスト前に、お母さんが次のような約束をしたとします。「数学で満点を取るか、または英語で満点を取ったら、新しいiPadを買ってあげる。」あなたはテストで頑張って、数学で満点、英語で80点を取ったのですが、iPadは買ってもらえませんでした。お母さんが「嘘をついた」と責められるのも当然ですね。

つまり嘘とは「数学で満点を取る。または、英語で満点を取る」 $\Rightarrow$ 「新しいiPadを買ってあげる」という命題の形で考えると、仮定は満たされたのに、結論は満たされなかったことを意味します。嘘とは結んだ約束が真ではなく、偽であることと考えられますよね。

【7】 次の命題が偽であることを示しなさい。但し、 $x, y$  は実数、 $n$  は自然数とします。

①  $x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$                       ②  $|x| \leq |y| \Rightarrow x \leq y$                       ③  $n$  は奇数  $\Rightarrow 4n + 1$  は素数

【解答】 ① 反例として  $x = -\sqrt{5}$  があるから、この命題は偽である。

② 反例として  $x = -2, y = -4$  があるから、この命題は偽である。

③ 反例として  $n = 5$  があるから、この命題は偽である。

(注) ②や③の反例は、他にも色々ありますね。とにかく仮定は満たすが結論を満たさないものが見つかれば、その命題は偽だと言えます。