階差数列

by Aokijuku

問題 階差数列とは何ですか。次の数列を例にして説明しなさい。1, 2, 6 , 15, 31, ...

解答 ①この数列の一般項（第n項のこと）は、見ただけでは分からないが、仮に隣り合う項の差を取ってみると

1, 2, 6, 15, 31, ... ←元の数列

1, 4, 9, 16, ... ←隣り合う項の差を取って出来た数列

このように、隣り合う項の差を取ると、これらが一定の法則に　従って変化していることが分かる。（実際、n 番目の項は n^2 である。）このように元の数列の２項間の差を取って出来る数列のことを「階差数列」と言う。

問題 元の数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ の時、元の数列の一般項はどうやって求めますか。下の式を利用して説明しなさい。

$a_2 - a_1 = b_1$

$a_3 - a_2 = b_2$

$a_4 - a_3 = b_3$

$a_5 - a_4 = b_4$

....

$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$　　（注：数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ には、$a_{n+1} - a_n = b_n$ の関係があることに　注目すること。）

解答 ②左の式を辺々足すと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= b_1\\
a_3 - a_2 &= b_2\\
a_4 - a_3 &= b_3\\
a_5 - a_4 &= b_4\\
&\cdots\cdots\\
a_n - a_{n-1} &= b_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1}$$

つまり　$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ （$n \geqq 2$）　となる。

（注：Σの上の式が $n-1$ になっていることに注意。実際に、b_k の k に $k=1$ から $n-1$ まで代入して、式があっていることを確認すること。また、$n \geqq 2$ となっているのは、Σの和の要素の個数が最低１個は必要だからであることにも注意。）

問題 ①の例で、実際に階差数列の考え方を使って、元の数列の一般項を求めなさい。

解答 元の数列を $\{a_n\}$、その階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$\{b_n\}$ の第 k 項、つまり b_k は $b_k = k^2$ と表せる。

よって $n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{6} = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$$　となる。

この式に $n=1$ を代入すると、$a_1 = 1$ となり、与えられた a_1 の値と一致する。よって、$a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$

となる。　（※最後のチェックで、$n \geqq 2$ という条件が外れることに注意。）

問題　次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

2，3，6，14，22，38，65，106，……

解答　与えられた数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，$\{b_n\}$ の階差数　列を $\{c_n\}$ とし，また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$\{b_n\}$ は　1，3，8，16，27，41，……

$\{c_n\}$ は　2，5，8，11，14，……

よって　$c_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$ となり

$n \geqq 2$ のとき　$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k-1) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$

ゆえに　$b_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 2$　……①

① で $n=1$ とすると，$b_1 = 1$ となるから，① は $n=1$ のとき　にも成り立つ。

よって　$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 2\right)$

$$= 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{5}{2}(n-1)n + 2(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}n^3 - \frac{13}{4}n^2 + \frac{19}{4}n$$

② で $n=1$ とすると，$a_1 = 2$ となるから，② は $n=1$ のとき　にも成り立つ。したがって，求める一般項は

$$a_n = \frac{1}{2}n^3 - \frac{13}{4}n^2 + \frac{19}{4}n$$

更に　$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{13}{4}k^2 + \frac{19}{4}k\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2 - 23n + 44)$$