（２次対策：2021年 ②）

問題 座標平面の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ (ただし，$s \fallingdotseq 0$ かつ $|t| \fallingdotseq 1$ とする) を中心として y 軸に接する円を C とし，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ および点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ から C に引いた接線で，y 軸とは異なるものをそれぞれ L_{A}，L_{B} とする。一般に三角形の3頂点から対辺またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わり，その点を三角形の垂心という。また，点Pが正の x 座標をもつとき，点Pは右半平面にあるという。

(1) $s>0$ かつ $|t|<1$ のとき L_{A} の傾きは $^{ア}\boxed{\quad}$ であり，L_{B} の傾きは $^{イ}\boxed{\quad}$ である。

(2) 点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が，右半平面にある点Pに対する三角形APBの内心となるための条件は $s>0$ かつ $^{ウ}\boxed{\quad}$ である。

(3) 三角形AQBの垂心 $\mathrm{H}(u,\ v)$ の座標を s と t の式で表すと，$u=^{エ}\boxed{\quad}$，$v=^{オ}\boxed{\quad}$ である。また，$s>0$ かつ $|t|<1$ のとき，点 $\mathrm{R}(-u,\ -v)$ と直線 L_{A} との距離 d を，絶対値の記号および根号を用いずに，できるだけ簡単な式で表すと　$d=^{カ}\boxed{\quad}$ となる。

(4) 右半平面にある点Pが，2点A，Bを焦点とし，長軸の長さ $2a$ (ただし，$a>1$ とする) の楕円上にあるとき，三角形APBの内心 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は方程式

$$^{キ}\boxed{\quad}x^2+^{ク}\boxed{\quad}x+^{ケ}\boxed{\quad}y^2+^{コ}\boxed{\quad}y=1$$

で表される2次曲線上にある。

解答 (1) L_{A} の傾きを m_{A} とおくと，L_{A} の方程式は

$$y=m_{\mathrm{A}}x-1$$

すなわち　$m_{\mathrm{A}}x-y-1=0$

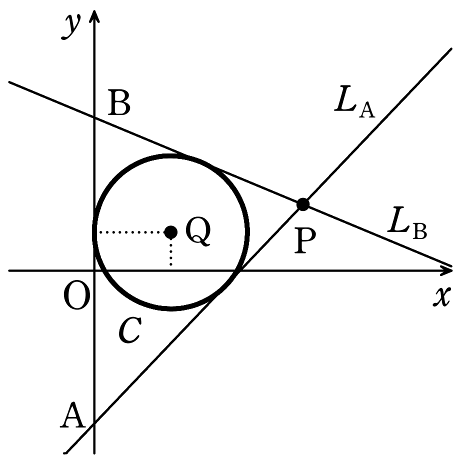
これと点Qとの距離が s であるから

$$s=\frac{|m_{\mathrm{A}}s-t-1|}{\sqrt{m_{\mathrm{A}}{}^2+1}}$$

両辺を2乗して整理すると

$$m_{\mathrm{A}}{}^2s^2+s^2=m_{\mathrm{A}}{}^2s^2-2m_{\mathrm{A}}s(t+1)+(t+1)^2$$

よって　$m_{\mathrm{A}}=^{ア}\dfrac{(t+1)^2-s^2}{2s(t+1)}$



同様にして，L_{B} の傾きを m_{B} とおいて計算すると　$m_{\mathrm{B}}=^{イ}\dfrac{(t-1)^2-s^2}{2s(t-1)}$

(2) (1)の図から，点Qが右半平面にある点Pに対する△APBの内心となるとき，円 C が内接円となるから，L_{A} と L_{B} の交点が点Pとなる。

点Pの x 座標は，$y=m_{\mathrm{A}}x-1$ と $y=m_{\mathrm{B}}x+1$ から y を消去して整理すると

$$x=\frac{2}{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}$$

点Pは右半平面にあるから　$\dfrac{2}{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}>0$　……①

点Qも右半平面にあるから　$s>0$

また，円 C と y 軸との接点が線分AB上(両端を除く)にあるから　$|t|<1$

ここで　　$m_A - m_B = \dfrac{(t+1)^2 - s^2}{2s(t+1)} - \dfrac{(t-1)^2 - s^2}{2s(t-1)}$

$$= \frac{(t-1)(t^2+2t+1-s^2)-(t+1)(t^2-2t+1-s^2)}{2s(t+1)(t-1)} = \frac{s^2+t^2-1}{s(t^2-1)}$$

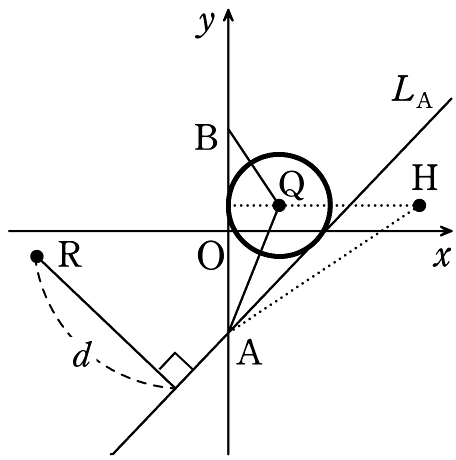
① より $m_A - m_B > 0$ であるから　　$\dfrac{s^2+t^2-1}{s(t^2-1)} > 0$

$s>0$，$|t|<1$ であるから　　$s^2+t^2<1$

したがって，求める条件は　　$s>0$ かつ ${}^{ウ}s^2+t^2<1$

(3)　図より，点 H の y 座標は点 Q の y 座標と等しいから

$$v = {}^{オ}t$$



直線 BQ の傾きは　　$\dfrac{t-1}{s}$

よって，点 A を通り直線 BQ に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{s}{t-1}x - 1 \quad \cdots\cdots ②$$

点 H は直線 $y=t$ ……③ 上にあるから，② と ③ から

y を消去すると　　$t = -\dfrac{s}{t-1}x - 1$

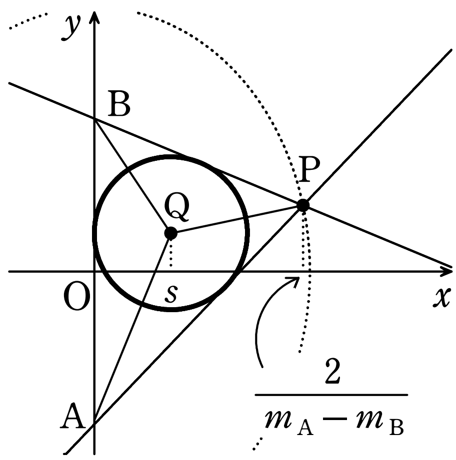
よって　　$x = \dfrac{1-t^2}{s}$　　　　したがって　　$u = {}^{エ}\dfrac{1-t^2}{s}$

また　　$d = \dfrac{|-m_A u + v - 1|}{\sqrt{{m_A}^2+1}} = \dfrac{|m_A u - v + 1|}{\sqrt{{m_A}^2+1}}$

$$= \frac{\dfrac{|(1-t^2)\{(t+1)^2-s^2\}-2s^2(t-1)(t+1)|}{2s^2(t+1)}}{\dfrac{\sqrt{\{(t+1)^2-s^2\}^2+4s^2(t+1)^2}}{2s(t+1)}}$$

$$= \frac{(1-t^2)\{(t+1)^2+s^2\}}{s\{(t+1)^2+s^2\}} = {}^{カ}\frac{1-t^2}{s}$$

(4)　(2) の条件，すなわち $s>0$ かつ $s^2+t^2<1$ のもとで考える。



点 P の x 座標は　　$x = \dfrac{2}{m_A - m_B} = \dfrac{2s(t^2-1)}{s^2+t^2-1}$

△APB の内接円の半径は s であるから，△APB の

面積 S は　　$S = \dfrac{1}{2}s(\text{PA}+\text{PB}+\text{AB})$

また　　　$S = \dfrac{1}{2}\text{AB}\cdot\dfrac{2}{m_A - m_B}$

点 P が 2 点 A，B を焦点とする長軸の長さ $2a$ の楕円上にあるとき　　$\text{PA}+\text{PB}=2a$

$\text{AB}=2$ であるから　　$\text{PA}+\text{PB}+\text{AB}=2a+2$

よって　　$\dfrac{1}{2}s(2a+2) = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2s(t^2-1)}{s^2+t^2-1}$

$s>0$ であるから，両辺に $\dfrac{s^2+t^2-1}{s}$ を掛けて整理すると

$$(a+1)(s^2+t^2-1)=2(t^2-1)$$

$a>1$ であるから　　$\dfrac{a+1}{a-1}s^2+t^2=1$

$\dfrac{a+1}{a-1}>0$ であるから，点 Q は楕円 ${}^{キ}\dfrac{a+1}{a-1}x^2+{}^{ク}0x+{}^{ケ}1y^2+{}^{コ}0y=1$ 上にある。